

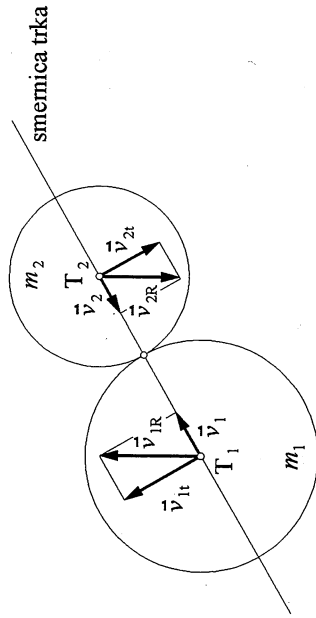
V tem primeru je seveda treba poskrbeti, da bo masa obdelovanca in njegovega podstavka m_2 čim večja v primerjavi z maso kladiwa m_1 , če hočemo čim večji del kinetične energije kladiwa spremeniti v preoblikovalno delo. Tudi pri kovanju je seveda koeficient trka ε večji od nič ($\varepsilon \cong 0,1$ do $0,2$), vendar kvalitativno veljajo podobna razmerja tudi pri realnem kovanju.

2.7.3 Poševni centrični trk

Poševni centrični trk v ravnini se od premega centričnega trka razlikuje po tem, da hitrosti niso več samo v smeri smernice trka, ampak je smer hitrosti v ravnini poljubna. V tem primeru obe hitrosti telesa m_1 $\vec{v}_{1R}$ in telesa m_2 $\vec{v}_{2R}$ pred trkom razstavimo na komponenti v smeri smernice trka $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ in pravokotno nanjo $\vec{v}_{1t}$ in $\vec{v}_{2t}$. Komponenti hitrosti, pravokotni na smernico trka $\vec{v}_{1t}$ in $\vec{v}_{2t}$, se med trkom nič ne spremenita, tako da velja:

$$\vec{v}'_{1t} = \vec{v}_{1t} \quad \text{in} \quad \vec{v}'_{2t} = \vec{v}_{2t} \quad (2.104),$$

kjer smo s črtico spet označili hitrosti po trku.



Slika 2.18. Poševni trk

Komponenti hitrosti v smeri smernice trka $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ spremenita svoje velikosti po pravih, ki veljajo za premi centrični trk, in izračunamo komponenti teh hitrosti po trku kar po enačbah (2.95). Tako izračunamo komponenti obeh hitrosti po trku $\vec{v}'_1$ in $\vec{v}'_2$. Za določitev celotne hitrosti obeh teles po trku $\vec{v}'_{1R}$ in $\vec{v}'_{2R}$ pa komponente spet vektorsko sestavimo (ob upoštevanju enačb (2.104)):

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{1R} &= \vec{v}'_1 + \vec{v}_{1t} \\ \vec{v}'_{2R} &= \vec{v}'_2 + \vec{v}_{2t} \end{aligned} \quad (2.105).$$

3 Analitična mehanika

V prvem poglavju o dinamiki masne točke in v drugem o dinamiki masnega sistema smo preučevanje dinamičnih problemov zasnovali v bistvu na dveh Newtonovih zakonih o zvezi med silo in pospeškom in o sili ter reakciji nanjo. Vse dodatne enačbe in zakoni so izvirali iz teh dveh osnovnih principov. Taki dinamiki pravimo zato tudi Newtonova dinamika. V tem poglavju se bomo zelo na kratko seznanili še z enim, drugačnim obravnavanjem problemov dinamike, katerega začetnik in glavni utemeljitelj je francoski matematik Lagrange. Ta je konec osemnajstega stoletja pričel razvijati obravnavo dinamike z drugačno, tako imenovano analitično metodo, zato tovrstno mehaniko imenujemo analitična ali včasih kar Lagrangeova mehanika, čeprav je to metodo kasneje razvijalo in dopolnjevalo polega Lagrangea tudi več drugih matematikov in znanstvenikov.

Newtonova mehanika je praviloma zasnovana na shematskih prikazih, ki ponazarjajo more dele sistema ali dela sistema, in na geometrijskih in dinamičnih povezavah med deli sistema. V primerih, ko je obravnavan sistem sestavljen (iz več teles in podobno), si ga zamislimo in prikažemo razstavljenega na posamezne dele ob upoštevanju povezav. Prednost tega načina je velika fizikalna nazornost. Njegovi pomanjkljivosti pa sta, da moramo upoštevati tudi notranje sile, ki nas pogosto ne zanimajo, in pa predvsem obsežnost, če imamo opravka s sistemi, ki so sestavljeni iz velikega števila posameznih delov.

Lagrangeova mehanika, če ni to izrecno zaželeno, ne zahteva razstavljanja sistema na posamezne dele in obravnava sistem celovito. V primerjavi z Newtonovim postopkom je ta način manj fizikalno nazoren, ima pa veliko prednost pri obsežnih, sestavljenih sistemih. Tako na primer velika večina sodobnih računalniških programov za reševanje mehanskih problemov, ki so seveda zasnovani bolj splošno, da omogočajo reševanje tudi bolj obsežnih sestavljenih sistemov, sloni na osnovah analitične mehanike.

Utemeljitelj analitične mehanike Lagrange je bil v osnovi matematik in je tudi analitično metodo zasnoval zelo splošno, za nek posplošen sistem z določenimi matematičnimi lastnostmi, ki je lahko splošnejši od realnih sistemov, kakršne imamo v tehniki in strojništvu. Tudi sam postopek je zelo matematično formaliziran (variacijski račun), kar daje analitični mehaniki dodatne prednosti v praksi. Izpeljava enačb je matematično zahtevnejša, uporaba končnih enačb v konkretnih primerih pa običajno ne dela večjih težav tudi matematično manj večjemu študentu.

V skladu s posplošenim postopkom je Lagrange uvedel tudi tako imenovane posplošene koordinate, ki jih tradicionalno označimo z malo črko q . Tako imamo posplošeno koordinato

$$q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1),$$

ki se v splošnem seveda spreminja s časom in je torej funkcija časa t . Število teh posplošenih

koordinat bomo označevali z veliko črko N in je v večini naših primerov enako številu prostostnih stopenj sistema, ki ga označimo s P . Torej velja v praksi praviloma:

$$N = P \tag{3.2}$$

in v tem najpogostejšem primeru so koordinate q_j proste oziroma medsebojno nevezane in neodvisne. To pomeni, da lahko spreminjamo katerokoli koordinato, ne da bi se zaradi tega morale spreminjati vrednosti preostalih koordinat.

V splošnem pa ni vedno tako. Možnost, da je število koordinat N manjše od števila prostosti P je seveda nerealna, saj v tem primeru koordinatni sistem ne bi enolično definiral lege sistema. Tudi pri tehničnih primerih se včasih zgodi, da vpeljemo več koordinat kakor je število prostosti, torej:

$$N > P \tag{3.3}$$

V tem primeru so koordinate medsebojno odvisne ali vezane. V takem primeru obstajajo seveda povezovalne enačbe in število teh povezovalnih enačb je enako prav $N - P$. V poglavju 1.2 smo o vrstah teh povezav že govorili. Tu naj omenimo le, da je v tehnični praksi večinoma tako, da so povezovalne enačbe take, da so sistemi geometrijski oziroma holonomni in stacionarni oziroma skleronomni. Po možnosti pa si seveda v praksi prizadevamo, da bi bilo število koordinat kar najmanjše, saj vsaka dodatna koordinata poveča obseg dela. To pa pomeni, da je v veliki večini primerov število koordinat enako številu prostosti sistema, koordinate pa so med seboj nevezane.

Vpeljemo še krajevne vektorje do posameznih masnih točk. Imamo mali n masnih točk (pri togih telesih z n označimo število sil):

$$m_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.4}$$

in prav toliko njim pripadajočih krajevnih vektorjev $\vec{r}_i$, in sicer:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N) \tag{3.5}$$

če je sistem stacionaren.

Označimo s $\vec{F}_i$ še rezultanto vseh zunanjih sil, ki delujejo na masno točko m_i in s $\vec{F}_{ik}$ notranjo silo, ki deluje iz i -te masne točke proti k -ti masni točki.

3.1 Analitična statika

Bistven element Lagrangeove mehanike je tako imenovani virtualni pomik. Kakor pove že beseda, je to namišljen diferencialno majhen pomik, ki si ga samo zamislimo, izvedemo pa seveda ne. Pomembna lastnost virtualnega pomika je tudi ta, da mora biti možen pomik glede na lastnosti in vezi v sistemu. Matematično je virtualni pomik prva variacija krajevnega vektorja $\vec{r}$.

Tako je virtualni pomik $\delta\vec{r}_i$ glede na enačbo (3.5):

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{3.6}$$

Pri tem so $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_N$ prve variacije posplošenih koordinat q_j . Te prve variacije posplošenih koordinat pa lahko zapišemo še:

$$\delta q_j = \varepsilon_j \eta_j(t) \tag{3.7}$$

kjer je ε_j diferencialno majhno konstantno število, $\eta_j(t)$ pa je neka zvezna funkcija časa, ki ima na začetku in koncu časovnega intervala vrednost nič:

$$\eta_j(t_1) = 0 \quad \text{in} \quad \eta_j(t_2) = 0 \tag{3.8}$$

Delo, ki ga opravi sila pri virtualnem pomiku, imenujemo virtualno delo.

Osnovni ravnotežni pogoj statike izraža po Lagrange-u princip virtualnih pomikov, ki ga v praksi večkrat imenujemo tudi princip virtualnega dela. Ta pravi, da je potreben in zadosten pogoj, da je nek mehanski sistem v statični ravnotežni legi, da je vsota virtualnih del vseh, na sistem delujočih sil pri poljubnem virtualnem pomiku sistema enaka nič. Če s $\vec{F}_i$ označimo vse aktivne in reaktivne (v podporah) sile in je njihovo število enako n , zapišemo lahko prej citirani princip v matematični obliki zelo kratko:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$$

in še krajše in bolj splošno

$$\delta W = 0$$

če z δW označimo vsoto virtualnih del vseh sil, ki delujejo na mehanski sistem.

% upoštevanjem (če želimo) notranjih sil $\vec{F}_{ik}$ med n masnimi točkami zapišemo še:

$$(3.10),$$

(3.11).

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i = 0$$

Za tega telesa je vsota virtualnih del vseh notranjih sil enaka nič, saj velja, da je:

(3.12).

$$\vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{ki} \delta \vec{r}_k = 0$$

To trditev bomo, kakor ponavadi, dokazali za togo telo v ravnini.

Tedaj je:

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{\varphi} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_A)$$

in

(3.13).

$$\delta \vec{r}_k = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{\varphi} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_A)$$

Vstavimo v enačbo (3.12) izraza (3.13):

$$\vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{ki} \delta \vec{r}_k = \vec{F}_{ik} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_k) = \vec{F}_{ik} [\delta \vec{\varphi} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)] = 0,$$

ker sta $\vec{F}_{ik}$ in $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ vzporedna vektorja.

Ker je celotna vsota $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i$ sestavljena iz samih vsot po enačbi (3.12), je torej za togo telesa ta vsota enaka nič in zanje velja kar enačba (3.9).

Do enačbe (3.11) pridemo tudi, če nastavimo za vsako masno točko posebej Newtonov pogoj za statično tavnotežje:

$$\vec{F}_1 + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{1k} = 0 \quad / \cdot \delta \vec{r}_1$$

...

(3.14).

$$\vec{F}_i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} = 0 \quad / \cdot \delta \vec{r}_i$$

...

$$\vec{F}_n + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{nk} = 0 \quad / \cdot \delta \vec{r}_n$$

Sedaj pomnožimo prvo enačbo skalarno z $\delta \vec{r}_1$, i-to enačbo z $\delta \vec{r}_i$ in zadnjo enačbo z $\delta \vec{r}_n$ in seštejemo enačbe. Rezultat zapišemo kratko:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i = 0$$

in je enak enačbi (3.11).

Pokažimo še, da je enačba (3.9) ekvivalentna enačba obema znanimu pogojema za statično ravnotežje po Newtonu: $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ in $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$. Iz znanih razlogov bomo dokaz izpeljali spet za primer ravninskega gibanja togega telesa. Z vstavljanjem prve od enačb (3.13) v enačbo (3.9) dobimo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i [\delta \vec{r}_A + \delta \vec{\varphi} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_A)] = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_A + \delta \vec{\varphi} \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i] = 0 \quad (3.15).$$

Dva posebna primera virtualnega pomika sta, ko je $\delta \vec{r}_A = 0$ ali $\delta \vec{\varphi} = 0$. V prvem primeru, če je $\delta \vec{r}_A = 0$, je virtualni pomik izbran tako, da gre za čisto rotacijo brez translacije. Vstavimo v enačbo (3.15):

$$\delta \vec{r}_A = 0; \quad \delta \vec{\varphi} \neq 0; \quad \delta \vec{\varphi} \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i] = 0$$

in še

$$\sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i] = 0 = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) - \vec{r}_A \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0.$$

Ta pogoj je izpolnjen le, če sta hkrati:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0,$$

kar pa ustreza, kakor že vemo, pogojema Newtonove mehanike za statično ravnotežje sil brez skupnega prijemališča.

Drugi poseben primer virtualnega pomika je, če je $\delta \vec{\varphi} = 0$ in $\delta \vec{r}_A \neq 0$ (pomik brez rotacije). Vstavimo v enačbo (3.15) in dobimo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_A = 0 = \delta \vec{r}_A \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

ali

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0,$$

ki je Newtonov statični ravnotežni pogoj za sile s skupnim prijemališčem.

Lagrange je vpeljal tudi pojem posplošene sile, ki jo bomo označevali s Q .

Če v enačbo (3.9) vstavimo za $\delta \vec{r}_i$ izraz (3.6), imamo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j \quad (3.16).$$

S Q_j smo torej označili:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.17).$$

Tako dobimo drugo obliko principa virtualnih pomikov za statično ravnotežje:

$$\sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j = 0$$

(3.18).

Iz izraza (3.17) je očitno, da je posplošena sila skalarni produkt dveh vektorjev in torej skalarna veličina v nasprotju s silo, ki je vektorska veličina. Enota za posplošeno silo pa je newton ali newtonmeter odvisno od enote za posplošeno koordinato, ki je meter ali pa radian.

Poglejmo še izraz za princip virtualnih pomikov v statiki, če je sistem konservativen, se pravi, da se ohranja mehanska energija.

Napišemo enačbo (1.40) za i-to silo:

$$\vec{F}_i = -\nabla E_{pi} = -\frac{\partial E_{pi}}{\partial \vec{r}_i}, \quad (3.19),$$

kjer smo z E_{pi} označili potencialno energijo i-te masne točke.

Upoštevamo še, da je:

$$\sum_{i=1}^n E_{pi} = E_p$$

potencialna energija vsega sistema. Izraz v enačbi (3.16) lahko sedaj predelamo:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n -\frac{\partial E_{pi}}{\partial q_j} \delta q_j = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.20).$$

Za konservativne sisteme je:

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}. \quad (3.21).$$

Ta izraz za konservativne sisteme olajša določanje posplošenih sil. Princip virtualnih pomikov za konservativne sisteme brez izgub mehanske energije tako zapišemo sorazmerno preprosto:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

(3.22)

Ta enačba pomeni tudi prehod od pojma virtualnega dela (enačba (3.9)) prek posplošenih sil (enačba (3.18)) na potencialno energijo. Pri dinamiki se bo potencialni energiji pridružila še kinetična energija.

V primeru, ki je v tehnični praksi najpogostejši, da je število koordinat N enako številu prostosti P in so zato koordinate q_j medsebojno neodvisne, lahko enačbi (3.18) in (3.22) še poenostavimo.

Ker si lahko virtualni pomik prosto izberemo, je mogoče izbrati tudi takega, da je samo:

$$\delta q_1 \neq 0$$

prve variacije vseh preostalih koordinat pa so nič:

$$\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_N = 0.$$

V tem primeru ostane od enačbe (3.18):

$$\sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j = 0$$

samo prvi člen $Q_1 \delta q_1 = 0$. Ker je seveda $\delta q_1 \neq 0$, v tem primeru, mora biti:

$$Q_1 = 0.$$

Podobno dobimo pri tako izbranem virtualnem pomiku iz enačbe (3.2):

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

samo prvi člen

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \delta q_1 = 0$$

in

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0.$$

Razmišljanje o izbiri virtualnega pomika lahko ponovimo za primer:

$$\delta q_2 \neq 0, \quad \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_N = 0.$$

V tem primeru zapišemo princip virtualnega dela kar z izrazoma:

$$Q_2 = 0$$

oziroma

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0.$$

Ker lahko postopek ponovimo za katerokoli koordinato q_j , lahko torej princip virtualnega dela za medsebojno neodvisne koordinate namesto v obliki (3.18) zapišemo enostavneje brez vsote:

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

(3.23)

To pomeni, pogoj za statično ravnotežje sistema je, da so vse posplošene sile enake nič. Za konservativne sisteme se ta pogoj še malo poenostavi:

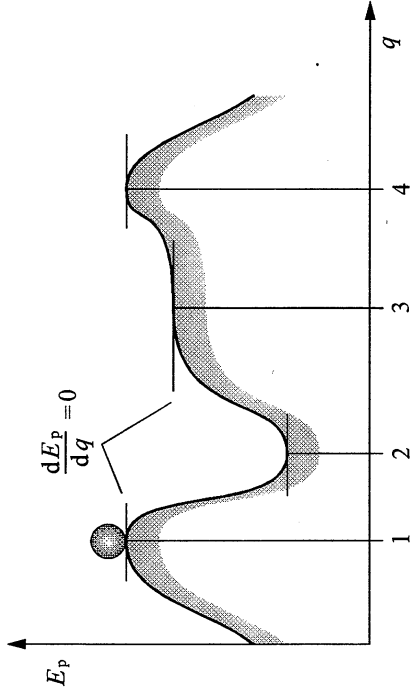
$$\frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

(3.24)

Omejitev veljavnosti enačb (3.23) in (3.24), da veljata le za medsebojno neodvisne koordinate, je pri tehničnih sistemih le redkokdaj ovira.

V primeru, da obravnavamo le take sisteme, za katere velja princip virtualnega dela v obliki (3.24) (konservativni sistem z medsebojno neodvisnimi koordinatami), smo torej ugotovili, da je sistem v statični ravnotežni legi tedaj, če so odvodi celotne potencialne energije sistema po vseh koordinatah enaki nič. Iz matematike je znano, da to pomeni, da ima v taki legi potencialna energija lokalno ekstremno vrednost. Tako povzamemo ugotovitev Lagrangeove mehanike, da so statične ravnotežne lege prej opisanega sistema tiste, v katerih doseže potencialna energija sistema lokalno ekstremno vrednost.

Nadaljnje študije ravnotežnih leg, katerih tu ne bomo podrobneje dokumentirali, so pokazale, da obstajajo tri vrste statičnih ravnotežnih leg. V primeru, da v ravnotežni legi potencialna energija doseže lokalni maksimum, je taka ravnotežna lega labilna oziroma nestabilna. Pri najmanjši motnji se sistem iz take lege premakne v prvo bližnjo stabilno ravnotežno lego. Ker v praksi take motnje vedno obstajajo, dejansko sistemov v nestabilnih ravnotežnih legah ne najdemo. Podobno velja za indiferentne ravnotežne lege, ko ima funkcija potencialne energije prevojno lego (drugi odvodi so nič). V praksi najdemo mehanske sisteme le v stabilnih ravnotežnih legah, ko ima potencialna energija lokalni minimum. To lahko zelo nazorno tudi grafično pokažemo za primer sistema z eno prostostjo, ko je $N = 1$.



Slika 3.1. Statične ravnotežne lege konservativnega sistema z eno prostostno stopnjo

Na sliki 3.1 je prikazana odvisnost potencialne energije takega sistema od edine koordinate q . Legi 1 in 4 sta labilni, lega 3 je indiferentna in le lega 2 je stabilna. Za ponazoritev si lahko predstavljamo, da je graf E_p relief, po katerem se giblje kroglica brez trenja. Očitno je stabilna mirovna lega kroglice le v legi 2 za vrednost koordinate q_2 .

3.2 Analitična dinamika

Razširitev pogoja za statično ravnotežje, kakor ga predstavlja princip virtualnega dela, na dinamično ravnotežje, izvedemo z upoštevanjem D'Alembertovega principa. Kakor smo ugotovili pri dinamiki točke, lahko namesto drugega Newtonovega zakona o zvezi med silami in pospeški uporabimo tudi D'Alembertov princip o vztrajnostnih silah. D'Alembert je namreč osnovno enačbo za statično ravnotežje, da mora biti vsota vseh sil nič, razširil na dinamiko tako, da je pogoj za dinamično ravnotežje, ko mora biti vsota vseh sil vključno z vztrajnostno silo enaka nič. S pojmom vztrajnostne sile (ki ji včasih rečemo tudi kar D'Alembertova sila) je označil negativni produkt mase in pospeška. Tako je vztrajnostna sila:

$$\vec{F}_v = -m\vec{a} \quad (3.25)$$

in matematični zapis D'Alembertovega principa, ki mu pravimo tudi kinetostatični zakon, za masno točko je:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_v = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a} = 0 \quad (3.26)$$

Očitno je izraz (3.25) hkrati že tudi na drug način napisan Newtonov zakon.

Princip virtualnih pomikov za sistem masnih točk v statičnem ravnotežju (enačba (3.11)) lahko razširimo ob upoštevanju D'Alembertovega principa in vztrajnostnih sil v pogojno enačbo za dinamično ravnotežje sistema masnih točk:

$$\delta W_Z + \delta W_N + \delta W_V = 0$$

$$(3.27),$$

kjer smo z δW_Z označili vsoto virtualnih del vseh zunanjih sil (vključno sile v podporah):

$$\delta W_Z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \quad (3.28)$$

Podobno smo z δW_N označili vsoto virtualnih del vseh notranjih sil:

$$\delta W_N = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \delta \vec{r}_i \quad (3.29)$$

Z δW_V pa označimo vsoto virtualnih del vseh vztrajnostnih sil:

$$\delta W_V = - \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \delta \vec{r}_i \quad (3.30)$$

Kakor smo že dokazali, je za togo telo drugi člen δW_N enak nič in zapišemo princip virtualnega dela za dinamično ravnotežje togih teles:

$$(3.31)$$

$$\delta W_Z + \delta W_V = 0$$

ali še

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \quad (3.32)$$

Enačba (3.31) je matematični zapis principa virtualnega dela za dinamično ravnotežje togih teles, ki pravi, da je pogoj za dinamično ravnotežje takega sistema, da je vsota virtualnega dela zunanjih sil (vključno sile v podporah) in virtualnega dela vztrajnostnih sil enaka nič. Enačbi (3.27) in (3.31) sta osnovni enačbi analitične dinamike. Podobno kakor pri analitični statiki so Lagrange in drugi razvili iz teh osnovnih še druge oblike analitičnih pogojev za dinamično ravnotežje.

3.2.1 Lagrangeove enačbe

Za izhodišče vzemimo osnovno enačbo dinamike v obliki (3.32), če zamenjamo levo in desno stran:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \quad (3.33)$$

Za desno stran dobimo po vstavljanju za $\delta \vec{r}_i$ izraza (3.6) in upoštevanju enačbe (3.17):

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j \quad (3.34)$$

Levo stran enačbe (3.33) pa predelamo tako, da vpeljemo vanjo izraz za kinetično energijo:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (3.35)$$

Zato vstavimo tudi v izraz na levi strani enačbe (3.33) izraz (3.6):

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.36)$$

Izraz $m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ sedaj predelamo:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_{ki}}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pri tem smo zamenjali vrstni red sumiranja in odvajanja (kakor že prej večkrat) in izenačili

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{ter} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

kar je v našem primeru dovoljeno.

Izraz za kinetično energijo i-te masne točke (3.35) odvajamo:

$$\frac{\partial E_{ki}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \dot{\vec{r}}_i \right) = m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

in podobno

$$\frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} = m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

saj je $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = f(q_j, \dot{q}_j)$ za stacionarne sisteme.

Uvedemo še celotno kinetično energijo sistema E_k :

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} v_i^2 \quad (3.38)$$

Sedaj lahko zapišemo del izraza (3.36) z upoštevanjem izrazov (3.37) in (3.38):

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{ki}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_{ki}}{\partial q_j} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j}, \quad (3.39)$$

ko smo spet zamenjali vrstni red sumiranja in odvajanja.

Leva stran enačbe (3.33) je sedaj po vstavljanju izraza (3.39) v izraz (3.36):

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j,$$

celo enačbo (3.33) napišemo ob upoštevanju izraza (3.34) še:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j. \quad (3.40)$$

Enačba (3.40) je zapis Lagrangeovih enačb, ki jih najpogosteje uporabljamo v analitični dinamiki. V literaturi jih včasih imenujemo tudi Lagrangeove enačbe druge vrste, vendar pa Lagrangeovih enačb prve vrste tu ne bomo obravnavali.

V najbolj pogostem primeru, ko so posplošene koordinate medsebojno neodvisne, smemo z uporabo enakega razmišljanja kakor v analitični statiki, najbolj splošno obliko Lagrangeovih enačb (3.40) še poenostaviti na obliko:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.41)$$

V primeru, ko vzamemo, da je sistem konservativen in se mehanska energija ohranja oziroma da zanemarimo vse izgube mehanske energije, lahko zapišemo Lagrangeove enačbe (3.40) še drugače. V tem primeru so vse sile potencialne in lahko zapišemo (glej enačbi (3.19) in (3.21)):

$$\vec{F}_i = -\nabla E_{pi} = -\frac{\partial E_{pi}}{\partial \vec{r}_i}$$

in

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j},$$

kjer smo z E_p označili potencialno energijo i-te sile in z $E_p = \sum_{i=1}^n E_{pi}$ potencialno energijo celega sistema. Uvedemo še tako imenovano Lagrangeovo energijsko funkcijo $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p \quad (3.42)$$

ki pomeni razliko med kinetično in potencialno energijo sistema. Medtem ko vzamemo, da je kinetična energija E_k funkcija generaliziranih koordinat q_j in generaliziranih hitrosti $\dot{q}_j$, pa velja, da potencialna energija E_p ni odvisna od generaliziranih hitrosti $\dot{q}_j$, ampak samo od generaliziranih koordinat. Torej:

$$E_k = f(q_j, \dot{q}_j)$$

$$H = E_k + E_p \quad (3.47),$$

vpeljal tudi po njem imenovano Hamiltonovo akcijo, ki pomeni časovni integral Lagrangeove energijske funkcije $\mathcal{L}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (3.48).$$

Hamiltonov princip pravi, konservativni mehanski sistem se giblje tako, da ima v enačbi (3.48) napisani akcijski integral ekstremno vrednost. Ker je ta ekstremna vrednost pogosto minimum, imenujemo Hamiltonov princip včasih tudi Hamiltonov princip najmanjše akcije. Dejstvo, da ima Hamiltonova akcija ekstremno vrednost, napišemo v obliki:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (3.49),$$

ali z besedami, da je prva variacija Hamiltonove akcije nič. V naslednjem izvajanju bomo pokazali, da je izraz (3.49) enakovreden Lagrangeovim enačbam za konservativne sisteme. Izraz (3.49) lahko zapišemo še:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt \quad (3.50).$$

Ker je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j),$$

je

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad (3.51)$$

in po vstavljanju izraza (3.51) v izraz (3.50) dobimo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \quad (3.52).$$

Uporabimo še enačbo (3.7):

$$\delta q_j = \varepsilon_j \eta_j(t),$$

in

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (3.43).$$

Lagrangeova energijska funkcija $\mathcal{L}$ je tedaj:

$$\mathcal{L} = E_k(q_j, \dot{q}_j) - E_p(q_j) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j) \quad (3.44).$$

Samo v posebnih primerih se v enačbah (3.44) lahko pojavi tudi eksplicitna odvisnost od časa t .

Z vpeljavo Lagrangeove energijske funkcije $\mathcal{L}$ lahko za konservativne sisteme enačbo (3.40) napišemo še:

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad (3.45).$$

V primeru neodvisnih koordinat enačbo (3.45) še poenostavimo na zapis:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.46).$$

Lagrangeove enačbe (3.40), (3.41), (3.45) in (3.46) so glavna metoda reševanja dinamičnih problemov mehanike z analitičnim postopkom. Naj omenimo še, da so vsa dosedanja izvajanja Lagrangeove mehanike veljavna le za holonomne sisteme, za obravnavo anholonomnih pa je treba uporabiti še metodo s tako imenovanim Lagrangeovim multiplikatorjem.

3.2.2 Hamiltonov princip

Kakor smo omenili že v uvodu k poglavju o analitični mehaniki, je bil glavni snovatelj in utemeljitelj teh postopkov Lagrange. Tako je tudi vse do sedaj obravnavano v poglavju o analitični mehaniki skrajšan povzetek nekaterih osnov Lagrangeove mehanike. Na koncu tega poglavja si pogledjmo zgolj kratko osnovo še enega načina obravnave problemov mehanike, ki ga je uveljavil Hamilton. Tu se bomo omejili le na del Hamiltonove teorije, najpomembnejši za tehniko, ki ga imenujemo Hamiltonov princip ali včasih tudi princip najmanjše akcije. Pri vseh naših izvajanjih Hamiltonove teorije se bomo omejili le na konservativne sisteme.

Hamilton je poleg tako imenovane Hamiltonove funkcije H , ki je za konservativne sisteme enaka kar vsoti obeh oblik mehanske energije E_k in E_p :

kjer je ε_j diferencialno majhno konstantno število, η_j pa je neka zvezna funkcija časa, ki zadostuje pogoju (3.2):

$$\eta_j(t_1) = 0 \quad \text{in} \quad \eta_j(t_2) = 0.$$

S temi podatki lahko napišemo tudi

$$\delta \dot{q}_j = \varepsilon_j \dot{\eta}_j \quad (3.53).$$

Po vstavljanju v izraz (3.52) dobimo:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \varepsilon_j \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \varepsilon_j \dot{\eta}_j \right) dt \quad (3.54).$$

Drugi člen v izrazu (3.54) še predelamo:

$$\varepsilon_j \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j dt = \varepsilon_j \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\eta_j = \varepsilon_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} dt \quad (3.55).$$

V izrazu (3.55) smo uporabili znano pravilo delne integracije (per partes). V izrazu, ki ga dobimo po delni integraciji, pa je prvi člen nič:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} [\eta_j(t_2) - \eta_j(t_1)] = 0,$$

ker so vrednosti funkcije η_j na časovnih mejah t_1 in t_2 enake nič.

Z upoštevanjem tega dobimo za izraz (3.54):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \varepsilon_j \eta_j dt = 0 \quad (3.56).$$

Ta izraz je nič le v primeru, da velja:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.57).$$

Ta enačba pa očitno ustreza Lagrangeovi enačbi za konservativne sisteme (3.45).

Literatura

- [1] Beer F.P., Johnston E.R.: Vector Mechanics for Engineers – Dynamics, McGraw-Hill, 1990.
- [2] Djurić S.: Dinamika i teorija oscilacija, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1976.
- [3] Kladnik R.: Visokošolska fizika – Mehanski in toplotni pojavi, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1991.
- [4] Kojić M.: Dinamika, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- [5] Kuhelj A. ml.: Mehanika - Kinematika, Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, Ljubljana, 1986.
- [6] Meriam J.L., Kraige L.G.: Engineering Mechanics 2 – Dynamics, Wiley, 1986.
- [7] Mursič M.: Osnove tehniške mehanike 3 – Dinamika, Akademski založba, Ljubljana, 1991.
- [8] Saje M.: Kinematika in dinamika, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, Ljubljana 1994.
- [9] Spiegel R.M.: Theory and Problems of Theoretical Mechanics, McGraw-Hill, 1967.
- [10] Stropnik J.: Kinetika za višješolski študij, Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, Ljubljana, 1995.
- [11] Targ S.M.: Teorijska mehanika, Gradjevinska knjiga, beograd, 1988.