

Univerza v Ljubljani



Fakulteta za strojništvo

LADISK – Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Dinamika togih teles

3. letnik, RRP

Laboratorijske vaje

Luka Knez, Janko Slavič 5. december 2018

1	Merjenje masnega vztrajnostnega momenta strojnih elementov	2
2	Masno uravnoteženje rotorja	9
3	Trk	17
4	Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema	22
\mathbf{Li}	teratura	26

Gradivo podaja nujne izraze za sledenje laboratorijskim vajam, pri čemer se predpostavlja znanje s predavanj in vaj.

Študent:		
Lab. vaja	Datum	Podpis asistenta
Prva		
Druga		
Tretja		

Zadnja različica se nahaja na: http://lab.fs.uni-lj.si/ladisk/data/pdf/LaboratorijskeVajeDTT.pdf

1 Merjenje masnega vztrajnostnega momenta strojnih elementov

1.1 Namen vaje

V gibalnih enačbah dinamike togih teles se pojavljajo veličine, ki so odvisne od mase in geometrijske oblike telesa. Imenujemo jih masni vztrajnostni momenti. Za posamezna, geometrijsko pravilno oblikovana in homogena telesa so te veličine lahko izračunljive po definicijskih enačbah. V tehniški praksi pa imamo pogosto opravka s strojnimi elementi, ki nimajo geometrijske podobnosti s kvadrom, valjem, kroglo, ipd., ampak so zapletenih oblik, neprimernih za enostaven matematičen popis geometrije. V takem primeru je dosti lažje in ponavadi tudi natančneje posredno izmeriti aksialni masni vztrajnostni moment strojnega elementa. Temu pristopu je namenjena ta vaja.

1.2 Definicija naloge

Določite aksialni masni vztrajnostni moment križa pralnega strojna, prikazanega na sliki 1 in ojnice, prikazane na sliki 2. Uporabite teorijo fizikalnega in torzijskega nihala.



Slika 1: Križ pralnega stroja.



Slika 2: Ojnica.

1.3 Teorija fizikalnega nihala



Slika 3: Model fizikalnega nihala.

Model fizikalnega nihala v vertikalni ravnini (slika 3) predstavlja togo telo, obešeno v neki točki. Fizikalno nihalo mase m ima težišče v točki T, ki je za l oddaljena od vrtišča O. Sistem ima eno prostostno stopnjo in je konservativen. Za popis lege nihala izberemo koordinato φ , ki popisuje edino prostostno stopnjo. Gibalno enačbo fizikalnega nihala izpeljemo z uporabo II. Newtonovega zakona za rotacijo okoli nepomične osi O:

$$\sum M_{\rm O} = J_{\rm O}\ddot{\varphi}.\tag{1}$$

Glede na sliko 3 sledi:

$$-mgl\sin\varphi = J_{\rm O}\ddot{\varphi}.\tag{2}$$

Funkcijo $\sin(\varphi)$ lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli $\varphi_0 = 0$: $\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \cdots$. V kolikor predpostavimo majhne kote, se izkaže, da lahko člene druge in višje stopnje zanemarimo; napako, ki jo s tem naredimo, nam prikazuje slika 4. Pri kotu 5° je tako napaka, če namesto sin φ uporabimo φ samo 0,13%, pri 10° pa 0,51% in nato hitro narašča. Kot majhne kote tako razumemo kote do nekaj kotnih stopinj (npr. 5°).



Slika 4: Napaka pri majhnih kotih.

Ob upoštevanju predpostavke majhnih kotov izraz (2) preoblikujemo v:

$$J_{\rm O}\ddot{\varphi} + m\,g\,l\,\varphi = 0,\tag{3}$$

oziroma:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \tag{4}$$

kjer z ω_0 označimo lastno krožno frekvenco fizikalnega nihala. Lastna krožna frekvenca je lastnost sistema in je za fizikalno nihalo podana z enačbo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,l}{J_{\rm O}}} = \frac{2\pi}{T_0},\tag{5}$$

kjer je T_0 nihajni čas lastnega nedušenega nihanja fizikalnega nihala.

1.3.1 Masni vztrajnostni moment križa pralnega stroja glede na težišče

Najprej bomo izmerili masni vztrajnostni moment križa pralnega stroja okoli težišča. Glede na izraz (5) bi lahko izmerili masni vztrajnostni moment glede na vrtišče O.



Slika 5: Delni naris križa pralnega stroja skupaj z vrtiščem O ter težiščem T.

Križ zanihamo na koncu enega od krakov kot fizikalno nihalo (slika 5) in izmerimo nihajni čas lastnega nedušenega nihanja T_0 . Z uporabo izraza (5) nato izračunamo masni vztrajnostni moment glede na

vrtišče O. Ker pa nas dejansko zanima masni vztrajnostni moment glede na težišče T, lahko z uporabo Steinerjevega stavka zapišemo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m_{\rm kr} \, g \, L_{\rm kr}}{J_{\rm O}}} = \sqrt{\frac{m_{\rm kr} \, g \, L_{\rm kr}}{J_{\rm T-kr} + m_{\rm kr} \, L_{\rm kr}^2}},\tag{6}$$

kjer je $L_{\rm kr}$ izmerjena razdalja od težišča križa do konca kraka in $m_{\rm kr}$ masa križa.

Iz enačbe 6 sedaj izrazimo težiščni vztrajnostni moment križa kot:

$$J_{\rm T-kr} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} m_{\rm kr} g L_{\rm kr} - m_{\rm kr} L_{\rm kr}^2$$
(7)

1.3.2 Masni vztrajnostni moment ojnice glede na težišče

Naloga zahteva tudi, da izmerimo masni vztrajnostni moment ojnice okoli težišča. V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko, če izmerimo masni vztrajnostni moment okoli dveh različnih vrtišč in vemo kakšna je razdalja med njima, določimo tudi masni vztrajnostni moment glede na težišče.

Če ojnico na sliki 6 zanihamo okoli točke A in nato še okoli točke B kot fizikalno nihalo, potem lahko izmerimo nihajna časa lastnega nedušenega nihanja ojnice: T_{0A} in T_{0B} . Glede na izraz (5) nato izračunamo masna vztrajnostna momenta glede na os A oziroma B: J_A, J_B .



Slika 6: Naris ojnice.

Ker pa nas dejansko zanima masni vztrajnostni moment glede na težišče T, lahko z uporabo Steinerjevega stavka zapišemo:

$$\omega_{0A} = \frac{2\pi}{T_{0A}} = \sqrt{\frac{m_{\rm oj} \, g \, a}{J_{\rm A}}} = \sqrt{\frac{m_{\rm oj} \, g \, a}{J_{\rm T-oj} + m_{\rm oj} \, a^2}},\tag{8}$$

$$\omega_{0B} = \frac{2\pi}{T_{0B}} = \sqrt{\frac{m_{\rm oj} \, g \, b}{J_{\rm B}}} = \sqrt{\frac{m_{\rm oj} \, g \, (L-a)}{J_{\rm T-oj} + m_{\rm oj} \, (L-a)^2}},\tag{9}$$

kjer je L izmerjena razdalja med točkama A in B in *a* neznana razdalja od točke A do težišča T (slika 6). Imamo torej dve neznanki ($J_{\text{T-oj}}, a$) in dve enačbi (8,9). Iz izraza (8) izrazimo težiščni vztrajnostni moment ojnice $J_{\text{T-oj}}$:

$$J_{\rm T-oj} = \frac{T_{0\rm A}^2}{4\pi^2} \, m_{\rm oj} \, g \, a - m_{\rm oj} \, a^2 \tag{10}$$

in ga vstavimo v izraz (9) ter iz enačbe izrazimo a:

$$a = L \frac{g T_{0B}^2 - 4\pi^2 L}{g \left(T_{0A}^2 + T_{0B}^2\right) - 8\pi^2 L}.$$
(11)

Da lahko izračunamo masni vztrajnostni moment glede na težišče T, moramo izmeriti še maso ojnice $m_{\rm oj}$.

1.3.3 Meritve

Masa

Maso križa in ojnice izmerimo s tehtnico.

Kaj gre lahko narobe?

• Napačno merjenje-položi element na sredino merilne ploščadi.

Razdalje

Razdalji $L_{\rm kr}$ ter L med točkama A in B izmerimo s kljunastim merilom.

Kaj gre lahko narobe?

- Napačen odčitek \rightarrow ne izvleci merila iz merjenca, vrednost odčitaj v položaju meritve.
- Napačen odčitek \rightarrow odčitaj merjeno vrednost le s
 tisto natančnostjo, ki jo nonij omogoča.
- Napačen odčitek \rightarrow paralaksa, glej pravokotno na nonij.
- Napačen odčitek \rightarrow odčitani vrednosti dodaj 20mm širine čeljusti.

Nihajni čas

Nihajni čas nihanja križa in ojnice izmerimo s štoparico. Merimo čas večjega števila nihajev, saj tako zmanjšamo (relativno) napako človeškega reakcijskega časa in netočnost pri določitvi skrajne lege nihala. Število merjenih nihajev naj bo med 10 in 30. Meritev nihajnih časov ponovimo vsaj 5-krat, prav tako naj meri več različnih oseb.

Kaj gre lahko narobe?

- Prevelik začetni odmik (kot) od ravnovesne lege \rightarrow linearna teorija predpostavlja nihanja z majhnimi (< 5°) amplitudami kotov.
- Napačen odčitek \rightarrow odčitaj merjeno vrednost le s tisto natančnostjo, ki jo štoparica omogoča.
- Napačno število nihajev \rightarrow ko pritisneš na sprožilec začneš šteti število nihajev z nič.
- Napačno število nihajev \rightarrow merjenje časa ustaviš, ko nihalo po nekaj nihajih doseže izhodiščno lego.
- Napačen izračun \rightarrow v izračunih upoštevaj čas enega nihaja.

Simbol	Vrednost	Enota
$m_{\rm kr}$		kg
$m_{ m oj}$		kg
$L_{\rm kr}$		m
L		m
T_0		s
T_{0A}		s
T_{0B}		s
a		m
$J_{\mathrm{T}\text{-kr}}$		$\mathrm{kg}\mathrm{m}^2$
$J_{\mathrm{T-oj}}$		${\rm kgm^2}$

Pregled meritev in rezultati:

1.4 Teorija torzijskega nihala

Če uspemo izdelek, katerega MVM nas zanima, vpeti v težišču kot torzijsko nihalo, potem je MVM takega nihala relativno enostavno določiti iz ravnotežne enačbe (II. Newtonov zakon):

$$\sum M_{\rm T} = J_{\rm T} \ddot{\varphi}.$$
(12)

Če je k togost torzijske vzmeti (zanemarljive mase), potem je zunanji moment na merjenec $M_{\rm T} = -k \varphi$, slika 7. Sledi:

$$-k\,\varphi = J_{\rm T}\ddot{\varphi}.\tag{13}$$



Slika 7: Model torzijskega nihala.

Ko uredimo in normiramo izraz (13), izpeljemo:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J_{\rm T}}\,\varphi = 0,\tag{14}$$

kjer je lastna krožna frekvenca torzijskega nihala:

$$\omega_{0,T} = \sqrt{\frac{k}{J_{\rm T}}}.$$
(15)

Ker v našem primeru ne poznamo togosti torzijske vzmeti k, je potrebno narediti najprej meritev z vzorcem znanega MVM $J_{T,1}$:

$$k = \omega_{0,T,1}^2 J_{\mathrm{T},1},\tag{16}$$

kjer je:

$$\omega_{0,T,1} = \frac{2\pi}{T_1}.$$
(17)

V drugem koraku nato naredimo meritev na neznanem MVM $J_{\rm T}$:

$$J_{\rm T} = \frac{k}{\omega_{0,T,2}^2},$$
(18)

kjer je:

$$\omega_{0,T,2} = \frac{2\pi}{T_2}.$$
(19)

1.4.1 Meritve

0		
Simbol	Vrednost	Enota
$J_{\mathrm{T},1}$		${\rm kg}{\rm m}^2$
T_1		s
T_2		s
$\omega_{0,T,1}$		rad/s
k		Nm/rad
$\omega_{0,T,2}$		rad/s
J _T		${\rm kg}{\rm m}^2$

Pregled meritev in rezultati:

1.5 Teoretična vprašanja

- 1. Kaj je to MVM in kakšna je razlika med aksialnimi in deviacijskimi MVM?
- 2. Zakaj pri izpeljavi enačb predpostavimo majhne kote? Do katere vrednosti kota lahko to storimo?
- 3. Kako MVM vpliva na lastno krožno frekvenco?
- 4. Ali se pri nihanju križa pralnega stroja ter ojnice na laboratorijski vaji pojavi dušenje?
- 5. Kakšna je povezava med težiščnim MVM in MVM v poljubni točki?
- 6. Kako merimo s kljukastim merilom?
- 7. Kako niha torzijsko nihalo in kako smo določili togost torzijske vzmeti?

2 Masno uravnoteženje rotorja

2.1 Namen vaje

V industrijskem okolju ter tudi pri individualnih potrošnikih je v uporabi ogromno strojev, katerih sestavni deli rotirajo okoli poljubne osi. Slaba kvaliteta izdelave sestavnih delov ali pa obraba, ki se ščasoma na njih pojavi, vodi v neuravnoteženo rotacijo. Neuravnotežen rotor med obratovanjem izkazuje povečane nivoje vibracij, kar je lahko moteče in tudi nevarno za uporabnike.

Namen te laboratorijske vaje je najprej predstaviti postopek merjenja kvalitete uravnoteženja togega rotorja glede na standard ISO 10816-1, nato pa so še podrobneje razloženi principi uravnoteženja realnih togih rotorjev.

2.2 Definicija naloge in izvedba vaje

2.2.1 Postopek merjenja kvalitete uravnoteženja

Kvaliteta uravnoteženja rotorja se določa po standardu ISO 10816-1 na podlagi merjenja hitrosti vibracij na ležajnih mestih. Primer rotorja, kateremu se pomeri kvaliteta uravnoteženja je prikazan na sliki 8.



Slika 8: Primer rotorja.

Posledica slabo uravnoteženega rotorja je povečan nivo vibracij, ki jih lahko izmerimo na ležajih. Za določevanje kvalitete uravnoteženja se torej izrabi njegovo posledico: velikost nivoja vibracij, katere sprejemljivost določimo glede na standard ISO 10816-1:1995¹. Standard navaja, da je za večino naprav efektivna hitrost $v_{\rm rms}$ primerno merilo za oceno sprejemljivosti nivoja vibracij. To velja za relativno širok razpon hitrosti vrtenja naprav. Same naprave so razdeljene v več razredov:

Razred I	Majhne naprave (električni motorji moči do 15kW).
Razred II	Srednje velike naprave moči $15 \rm kW$ do $75 \rm kW$ brez posebnih temeljev ali
	togo pritrjene naprave do 300kW na posebnih temeljih.
Razred III	Velike naprave na velikih togih temeljih.
Razred IV	Velike naprave na relativno mehkih temeljih.

 $^{^{1}}$ ISO 10816-1:1995 Mechanical vibration – Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts – Part 1: General guidelines

Posamezno napravo iz določenega razreda naprav nato glede na izmerjeni nivo vibracij s pomočjo tabele 1 razvrstimo v eno od štirih obratovalnih področij:

- Področje A Večina novih naprav naj bi spadala v to področje.
- Področje B Naprave v tem področju so ponavadi ustrezne za dolgotrajno obratovanje.
- **Področje C** Naprave v tem področju so ponavadi neustrezne za dolgotrajno obratovanje. Časovno omejeno delovanje naprav je dovoljeno.
- Področje D Oscilacije v tem področju lahko resno poškodujejo napravo.

$v_{\rm rms}[{\rm mm/s}]$	Razred I	Razred II	Razred III	Razred IV
0,28				
0,45	А	Δ		
0,71		A	А	
1,12	D			А
1,80	D	р		
2,80	C	D	C	
4,50		C		р
7,10			C	D
11,2				C
18,0	D	D		C
28,0			D	р
45,0				D

Tabela 1: Vrednotenje sprejemljivosti nivoja vibracij po standardu ISO 10816-1:1995.

Hitrosti v ležajih se navadno meri s pomočjo namenskih naprav, ki izmerijo efektivno ali tudi rms (rootmean-square) hitrost, katera je definirana kot:

$$v_{\rm rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 \,\mathrm{d}t} \,. \tag{20}$$

S pomočjo stroboskopske svetilke se lahko dodatno izmeri še hitrost vrtenja rotorja.

2.2.2 Masno uravnoteženje togega rotorja

Na sliki 9 je prikazan sistem s togim rotorjem. V okviru laboratorijske vaje boste spoznali merjenje sil v ležajih kot posledica neuravnoteženosti rotorja in tudi uravnoteženje takega rotorja.



Slika 9: Merjenje neuravnoteženosti.

Pri rotaciji togega telesa okrog stalne osi se na ležajnih mestih pojavijo dinamične sile. Vrteči se koordinatni sistem x'y'z' je orientiran tako, da leži težišče togega rotorja na ravnini x'z' (slika 10):

$$\sum F_{x',i} = A_{x'} + B_{x'} = -m e \dot{\varphi}^2$$

$$\sum F_{y',i} = A_{y'} + B_{y'} = m e \ddot{\varphi}$$
(21)
$$\sum F_{z',i} = 0$$

$$\sum M_{x'} = -B_{y'} L = -J_{x'z'} \ddot{\varphi} + J_{y'z'} \dot{\varphi}^2$$

$$\sum M_{y'} = B_{x'} L = -J_{x'z'} \dot{\varphi}^2 - J_{y'z'} \ddot{\varphi}.$$
(22)
$$\sum M_{z'} = J_{z'z'} \ddot{\varphi},$$

kjer so $A_{x'}$, $A_{y'}$, $B_{x'}$ in $B_{y'}$ sile v ležajih v vrtečem se koordinatnem sistemu x'y'z', L je razdalja med ležajema, $J_{y'z'}$ in $J_{x'z'}$ pa sta deviacijska masna vztrajnostna momenta. m je celotna masa rotorja, e je ekscentričnost, $\dot{\varphi}$ je kotna hitrost in $\ddot{\varphi}$ kotni pospešek.

Iz gibalnih enač
b (21) in (22) je razvidno, da so pri konstantni vrtilni hitrosti
 $\dot{\varphi}$ rotorja ($\ddot{\varphi} = 0$) dinamične sile na ležaje enake nič, kadar velja:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{T}} = \frac{\sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}}{\sum_{i} m_{i}} = \mathbf{0}$$

$$J_{y'z'} = 0$$

$$J_{x'z'} = 0$$

$$(23)$$



Slika 10: Vrtenje rotorja okrog stalne osi.

 \boldsymbol{r}_{T} je vektor težišča rotorja.

Izkaže se, da lahko dinamično uravnoteženje izvedemo z uporabo najmanj dveh uteži mas m_1 in m_2 , ki jih dodamo na različnih razdaljah z_1 in z_2 (glede na koordinatno izhodišče) ter polmeru r. Z uporabo enačb (21) ter (22) je mogoče izpeljati m e, $J_{x'z'}$ ter $J_{y'z'}$, položaj in maso uteži pa se določi na podlagi enačbe (23).

Postopek uravnoteženja rotorja

Preizkuševališče je prikazano na sliki 9. Rotor je uležajen z dvema drsnima ležajema, ki sta pritrjena na silomera. Silomera merita *reakcijske* sile na ležaja in sta pritrjena na jekleno podlago bistveno večje mase, kakor jo ima rotor. Rotor je gnan preko jermenskega prenosa, s čimer zmanjšamo vpliv zunanjih sil.

Pri konstantnem vrtenju rotorja se na posameznem ležajnem mestu zaradi neuravnoteženosti rotorja pojavi dinamična sila, ki ima komponenti v smeri x in y. Ta sila ima konstantno amplitudo, ki kroži s kotno hitrostjo $\dot{\varphi}$ rotorja, zato zadostuje merjenje sil v eni smeri. Rezultat meritve je časovni potek sil v podporah A_x in B_x za en vrtljaj, kot je prikazano na sliki 11. Merjenje se prične, ko leži referenčna točka na rotorju v ravnini xz (referenčna točka je na rotorju označena z "0°".) Čas merjenja je enak času enega vrtljaja T_0 .

Najprej je potrebno določiti fazni zamik vrtečega se koordinatnega sistema x'y'z'. Težišče, ki leži na ravnini x'z', bo soležno z ravnino xz v tistem trenutku, ko bo izmerjena sila $A_x + B_x$ minimalna: na sliki 11 je tako stanje prikazano pri kotu φ_r . V krožnem diagramu vrtečega se koordinatnega sistema x'y'z' na sliki 12 lahko narišemo težišče na os x', vsota pomerjenih sil pa leži na isti osi, vendar na negativnem delu. Za konkreten primer na sliki 11 vidimo, da sila A prehiteva težišče za φ_A , sila B pa zaostaja za φ_B . Obe sili tudi lahko narišemo v krožni diagram (slika 12). Iz krožnega diagrama določite še ostale veličine: $A_{x'}, A_{y'}, B_{x'}, B_{y'}$.



Slika 11: Izmerjena sila

Iz enač
b (21) ter (22) se lahko izračuna $m\,e,\,J_{x'z'}$ ter
 $J_{y'z'}.$

$$me = -(A_{x'} + B_{x'})/\dot{\varphi}^2 \tag{24}$$

$$J_{y'z'} = -B_{y'}L/\dot{\varphi}^2$$
 (25)

$$J_{x'z'} = -B_{x'} L/\dot{\varphi}^2$$
 (26)

Če želimo sistem uravnotežiti, potem moramo dodati dve masi $(m_1 \text{ in } m_2)$ na dveh različnih ravninah $(z_1 \text{ in } z_2)$; polmer pa je v obeh primerih enak r. Na podlagi enačbe (23) se zapiše sistem šestih enačb s šestimi neznankami $(m_1, m_2, x_1, y_1, x_2, y_2)$:

$$0 = me + m_1 x'_1 + m_2 x'_2,$$
 težišče v x' smeri (27)

$$0 = m_1 y'_1 + m_2 y'_2, \quad \text{težišče v } y' \text{ smeri}$$
(28)

$$0 = J_{y'z'} + m_1 y'_1 z'_1 + m_2 y'_2 z'_2, (29)$$

$$0 = J_{x'z'} + m_1 x'_1 z'_1 + m_2 x'_2 z'_2, (30)$$

$$r^2 = x_1'^2 + y_1'^2, (31)$$

$$r^2 = x_2'^2 + y_2'^2. ag{32}$$

Obstajajo štiri možne rešitve, samo ena ima obe masi pozitivni (dodajanje mase):

$$m_1 = \frac{\sqrt{(J_{x'z'} - mez_2)^2 + J_{y'z'}^2}}{\sqrt{r^2(z_1 - z_2)^2}}$$
(33)

$$m_2 = \frac{\sqrt{(J_{x'z'} - mez_1)^2 + J_{y'z'}^2}}{\sqrt{x^2(z_2 - z_2)^2}}$$
(34)

$$x_1' = \frac{r(z_1 - z_2)(m e z_2 - J_{x'z'})}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2} \sqrt{(J_{x'z'} - m e z_2)^2 + J_{y'z'}^2}}$$
(35)



Slika 12: Krožni diagram sil.

$$y_1' = \frac{J_{y'z'}r(z_2 - z_1)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2}\sqrt{(J_{x'z'} - m e z_2)^2 + J_{y'z'}^2}}$$
(36)

$$x_{2}' = \frac{r(z_{1} - z_{2})(J_{x'z'} - mez_{1})}{\sqrt{(z_{1} - z_{2})^{2}}\sqrt{(J_{x'z'} - mez_{1})^{2} + J_{y'z'}^{2}}}$$
(37)

$$y'_{2} = \frac{J_{y'z'}r(z_{1}-z_{2})}{\sqrt{(z_{1}-z_{2})^{2}}\sqrt{(J_{x'z'}-mez_{1})^{2}+J_{y'z'}^{2}}}$$
(38)

Izračunajte še kota φ_1 in φ_2 .

Merjenje sil v ležajih:

Sile na ležajnih mestih A in B v smeri x so izmerjene s silomerom (slika 10). Položaj (faza) rotorja je določen z induktivnim senzorjem. Zajem podatkov je izveden z merilno opremo podjetja National instruments v programu LabView.

Pri izvajanju meritve je potrebno paziti na naslednje:

- Da je pri zajemanju signala sil uporabljen nizkopasovni filter.
- Silomeri merijo reakcijske sile. Razmislite o predznakih!
- Uteži na rotorju morajo biti privijačene tako, da se pri rotaciji ne morejo odvijačiti, obvezno pa mora imeti rotor zaščito.
- Meritev mora biti izvedena takrat, ko ima rotor konstantno vrtilno hitrost, brez pospeševanja.



Pregled meritev in rezultati:

Slika 13: Vrišite izmerjene sile v krožni diagram.

Simbol	Vrednost	Enota
Podatk	i preizkušev	vališča
L		m
z_1		m
z_2		m
r		m
Podatł	ki pri obrato	ovanju
T_0		s
\dot{arphi}		rad/s
$A_{x'}$		Ν
$A_{y'}$		Ν
φ_{A}		0
$B_{x'}$		Ν
$B_{y'}$		Ν
φ_{B}		0
$arphi_{ m r}$		0
	Izračun	
m e		kgm
$J_{y'z'}$		${\rm kgm^2}$
$J_{x'z'}$		${\rm kgm^2}$
m_1		gram
m_2		gram
x'_1		m
y'_1		m
x'_2		m
y'_2		m
φ_1		0
φ_2		0

2.3 Teoretična vprašanja

- 1. Zakaj se na neuravnoteženih rotorjih pojavijo vibracije? Kdaj in zakaj je to nezaželeno?
- 2. Kako uvrščamo kvaliteto uravnoteženosti rotorja po standardu ISO 10816-1?
- 3. Kako se meri rms hitrosti v ležajih rotorja?
- 4. Kako se uporablja stroboskop?
- 5. Kako uravnotežimo neuravnotežen rotor?
- 6. Kakšna je razlika med statičnim in dinamičnim uravnoteženjem rotorjev?
- 7. Zakaj moramo sile na ležaje meriti pri konstatni vrtilni hitrosti rotorja?

3 Trk

3.1 Namen vaje

Pri obravnavi trka dveh ali več teles nas običajno zanimajo hitrosti po trku. Te v okviru teorije togih teles določimo ob predpostavki ohranitve gibalne količine ter z uporabo Poissonovega zakona trka, kjer je potrebno poznati t.i. *koeficient trka*. Pri teoretični obravnavi trka predpostavimo, da je koeficient trka odvisen zgolj od materiala teles, ki trčita, v splošnem pa je lahko odvisen tudi od velikosti in materiala teles, relativne hitrosti trka, temperature, hrapavosti površin...

Namen te vaje je izmeriti časovni potek sile pri trku kroglice s podlago in nato z obdelavo pomerjenih podatkov določiti koeficient trka.

3.2 Definicija naloge

Na sliki 14 je prikazana naprava za merjenje časovnega poteka sile pri trku kroglice s podlago, na sliki 15 pa shema eksperimenta. Naprava za merjenje sile je nastavljiva po višini, kar omogoča spust kroglice iz različnih višin. Na vrhu se nahaja elektromagnet, ki skrbi za hipni spust kroglice ter ravno trajektorijo njenega padca. Podlaga, v katero trči kroglica, je privijačena na silomer tipa PCB 208C04, ta pa je pritrjen na veliko vztrajnostno maso, ki zmanjša vpliv lastne dinamike same naprave. V silomeru se nahaja piezo kristal, na katerem se ob deformaciji pojavi električni naboj. Ta naboj se s pomočjo vgrajenega IEPE (*ang. Integrated Electronic Piezoelectric*) ojačevalnika naboja ter zunanjega IEPE napajalnika pretvori v napetost. Signal napetosti se nato pripelje na merilno kartico NI9223, ki omogoča zelo hitre zajeme (1M merilnih točk na sekundo), časovni podatki sile pa se shranijo na osebni računalnik za nadaljno obdelavo v programskem jeziku Python.



Slika 14: Slika naprave za merjenje časovnega potek sile pri trku kroglice s podlago.



Slika 15: Merilna shema eksperimenta.

Lastnosti silomera PCB 208C04:

- masa: 22,7 g,
- $\bullet\,$ merilno območje: od -2,2kN do +4,4kN,
- občutljivost: 1.183 mV/N,
- lastna frekvenca: 36 kHz,
- vgrajen nabojni ojačevalnik, signal je potrebno le še napajati.



Slika 16: Silomer PCB 208C04.

Koeficient trka ε se izračuna iz časovnega signala pomerjene sile F(t) na podlagi Poissonovega zakona trka, ki je definiran na ravni impulzov. Velja:

$$\varepsilon = \frac{I_{\rm E}}{I_{\rm K}}\,,\tag{40}$$

kjer je $I_{\rm E}$ impulz faze kompresije, $I_{\rm K}$ pa impulz faze ekspanzije. Ilustracija poteka sile trka, skupaj z označenima fazama kompresije in ekspanzije je prikazana na sliki 17. Vidimo, da lahko vrednost posameznega impulza izračunamo z uporabo numerične integracije. Velja:

$$I_{\rm K} = \int_{t_{\rm z}}^{t_{\rm v}} F(t) \, {\rm d}t \,, \qquad \qquad I_{\rm E} = \int_{t_{\rm v}}^{t_{\rm k}} F(t) \, {\rm d}t \,. \tag{41}$$



Slika 17: Ilustracija časovnega poteka sile med trkom. Označeni sta fazi kompresije in ekspanzije.

Alternativno lahko koeficient trka ε izračunamo tudi iz razmerja hitrosti tik pred in tik po trku, pri čemer upoštevamo samo hitrost kroglice, saj predpostavimo, da podlaga miruje. Velja:

$$\varepsilon = \frac{|\text{Hitr. po trku}|}{|\text{Hitr. pred trkom}|} = \frac{|v'|}{|v|}.$$
(42)

Hitrost tik pred trkom se določi po principu ohranitve mehanske energije, saj se vsa potencialna energija kroglice pretvori v kinetično:

$$v = \sqrt{2gh},\tag{43}$$

kjer je h višina spusta kroglice. Hitrost po trku pa se izračuna iz zaporedja dveh trkov, pri čemer se zanemari zračni upor. Za lažjo predstavo si poglejmo sliko 18, kjer sta skicirana dva zaporedna trka.



Slika 18: Skica dveh zaporednih trkov kroglice s podlago.

Po prvem trku se kroglica odbije navzgor z neznano hitrostjo v' in se zaradi delovanja gravitacije po nekaj časa ustavi, nato pa začne pospešeno padati nazaj navzdol. Hitrost pred drugim trkom je enaka hitrosti

v', pri čemer polovico časa med trkoma kroglica potuje navzgor, polovico časa pa navzdol. Če pomerimo čas med prvim in drugim trkom Δt , potem lahko izračunamo hitrost kroglice po prvem trku kot:

$$v' = g \,\frac{\Delta t}{2} \,. \tag{44}$$

Sedaj enačbi (43) in (44) vstavimo v enačbo (42) in dobimo končni izraz za alternativni izračun koeficienta trka:

$$\varepsilon = \frac{g\,\Delta t}{\sqrt{8g\,h}}\,.\tag{45}$$

Pričakovane so vrednosti ε med 0 in 1. Ko velja $\varepsilon = 0$ gre za popolnoma plastičen trk, ko pa je $\varepsilon = 1$ pa gre za popolnoma elastičen trk.

3.3 Izvedba vaje

Pri laboratorijski vaji boste uporabili kroglico iz kaljenega jekla, ki ima visoko površinsko trdoto (867 HV) in jo izpustili iz več višin, kot je to podano v spodnji preglednici. Na podlagi izmerjenih sil ter časov dveh zaporednih trkov boste nato dobili koeficiente trka ε . Za vsak primer opravite najmanj tri ponovitve in izračunajte povprečne vrednosti ε .

I regred meritev in rezultati.				
Simbol	M1	M2	M3	Enota
Višina 4,5 cm - Na podlagi pomerjene sile				
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/
Višina 9	$,5 \mathrm{~cm}$	- Na j	podlag	i pomerjene sile
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/
Višina 1	$4,5 \mathrm{~cm}$	ı - Na	podla	gi pomerjene sile
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/
Višina 4	$,5 \mathrm{~cm}$	- Na p	podlag	i dveh zaporednih trkov
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/
Višina 9,5 cm - Na podlagi dveh zaporednih trkov				
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/
Višina 14,5 cm - Na podlagi dveh zaporednih trkov				
ε				/
$\overline{\varepsilon}$				/

Pregled meritev in rezultati:

3.4 Teoretična vprašanja

- 1. Kako se izračunajo hitrosti teles po trku?
- 2. Kako je definiran koeficient trka in zakaj ga potrebujemo?
- 3. Kako deluje silomer? Kaj pomeni IEPE?
- 4. Ali višina spusta kroglice vpliva na dobljene koeficient trka?
- 5. Ali površinska trdota kroglic vpliva na dobljene koeficient trka?
- 6. Za kakšen tip trka gre v našem primeru?
- 7. Koliko časa je trajal trk kroglice s podlago?

4 Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema

4.1 Namen vaje

V strojniški praksi je centrifugalno vzbujanje velikokrat izvor vibracij strojev in naprav. V nekaterih primerih namensko dodamo izvor vibracij v sistem, npr. vibracijska sita, dozatorji razsutega materiala,..., v drugih primerih pa je tak izvor vibracij moteč, npr. neuravnoteženi rotor turbine,...Z namenom, da bi spoznali fenomen centrifugalnega vzbujanja, se bomo tukaj ukvarjali z analizo osnovnega modela centrifugalnega vzbujanja.

4.2 Definicija naloge

Za sistem na sliki 19 določite razmernik dušenja in lastno dušeno krožno frekvenco. Z meritvami določite frekvenčni odziv sistema zaradi centrifugalnega vzbujanja v ustaljenem stanju. Merjeni frekvenčni odziv primerjajte s teoretičnim. Kot je razvidno iz slike 19, smo predpostavili model z eno prostostno stopnjo.



Slika 19: Centrifugalno vzbujan sistem. Levo: sistem, desno: fizikalni model.

Podatki:

$$\begin{split} m &= 36,7\,\mathrm{kg}\\ m_e &= 0,03\,\mathrm{kg}\\ e &= 30\,\mathrm{mm}\\ k &= 243\,\mathrm{kN/m} \end{split}$$

4.3 Izvedba vaje

4.3.1 Lastno dušeno nihanje

Iz slike 20, ki prikazuje lasten dušen odziv nihala na sliki 19, lahko določimo razmernik dušenja δ in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja ω_{0d} .



Slika 20: Lasten dušen odziv sistema.

Poglejmo, kako pridemo do iskanih parametrov: gre za preprost sistem masa–vzmet–dušilka, za katerega lahko izpeljemo gibalno enačbo:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0. \tag{46}$$

Gibalno enačbo normiramo (delimo z maso m) in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0,\tag{47}$$

kjer je δ razmernik dušenja, ω_0 pa lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja. Glede na gibalno enačbo (47) pričakujemo odziv oblike:

$$x(t) = e^{-\delta \,\omega_0 \, t} \left[A \, \cos(\omega_{\rm 0d} \, t) + B \, \sin(\omega_{\rm 0d} \, t) \right],\tag{48}$$

kjer je $\omega_{0d} = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$ lastna krožna frekvenca dušenega nihanja in A in B konstanti, odvisni od začetnih pogojev.

Pri lahko dušenih sistemih $\delta \ll 1$ se izkaže, da se lastna nedušena ω_0 in lastna dušena krožna frekvenca ω_{0d} relativno malo razlikujeta. Če torej uporabimo poenostavitev $\omega_0 \approx \omega_{0d}$, lahko s pomočjo izraza (48), slike 20 ter malo sklepanja določimo razmernik dušenja δ in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja ω_{0d} .

4.3.2 Harmonsko vzbujanje sistema

Za centrifugalno vzbujanje sistema na sliki 19 je ob predpostavki $m_{\rm e} \ll m$ gibalna enačba:

$$(m+m_{\rm e})\ddot{x} + d\dot{x} + kx = m_{\rm e}\,e\,\omega^2\,\sin(\omega t).\tag{49}$$

Izraz (49) normiramo in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f_0\,\sin(\omega t),\tag{50}$$

kjer je $f_0 = \frac{m_e e \omega^2}{m_e + m}$. Za tako vzbujan sistem pričakujemo v ustaljenem stanju odziv:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi), \tag{51}$$

kjer je amplituda nihanja v ustaljenem stanju:

$$X = X_0 \beta \tag{52}$$

 in

$$X_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} \tag{53}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\,\delta\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$
(54)

Izraza (52) in (53) preoblikujemo v t.i. izraz normiranih amplitud v odvisnosti od vzbujevalne frekvence:

$$\gamma = \frac{X}{\frac{m_e e}{m_e + m}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \beta.$$
(55)

Tako smo prišli do frekvenčnega odziva sistema. Frekvenčni odziv glede na meritve dobimo tako, da pomerimo amplitude pomikov X pri določeni frekvenci vzbujanja ω in uporabimo prvi del izraza (55). Frekvenčni odziv glede na meritve primerjamo s teoretičnim frekvenčnim odzivom, ki ga dobimo tako, da za določeno vzbujevalno krožno frekvenco ω izračunamo drugi del izraza (55).

4.3.3 Meritve

Merjenje amplitude pomikov vsiljenega nihanja

Pri vzbujanju s centrifugalno silo vzbujevalne krožne frekvence ω želimo pomeriti amplitudo nihanja. Ker pa s pospeškomerom izmerimo pospeške, moramo uporabiti povezavo med amplitudo pospeška \ddot{X} in amplitudo pomika X za sinusni signal:

$$\ddot{X} = -\omega^2 X. \tag{56}$$

Meritve izvedemo na naslednji način:

- 1. nastavimo željeno kotno hitrost elektromotorja v obr/min,
- 2. počakamo, da se tranzient izniha,
- 3. na osciloskopu zamrznemo sliko in odčitamo dvojno amplitudo nihanja,
- 4. vrnemo se na prvo točko.

Simbol	imbol Vrednost				
Podatki preizkuševališča					
ω_0		rad/s			
f_0		Hz			





Slika 21: Funkcija γ pri različnih stopnjah dušenja ($\delta = 0, \delta = 0.01, \delta = 0.1$). Vrišite izmerjene točke.

4.4 Teoretična vprašanja

- 1. Na vaji smo najprej obravnavali lastno dušeno nihanje sistema, nato pa še centrifugalno vzbujen sistem. Kakšna je razlika pri nihanju teh dveh sistemov?
- 2. S kakšno frekvenco niha centrifugalno vzbujen sistem?
- 3. Kako smo določili lastno dušeno krožno frekvenco in razmernik dušenja?
- 4. Zakaj opazujemo odziv sistema v ustaljenem stanju?
- 5. Kako dušenje vpliva na razmernik amplitud γ centrifugalno vzbujenega sistema?
- 6. Zakaj smo na oscilatorju odčitali dvojno amplitudo nihanja?
- 7. Opišite nihanje, če je razmernik dušenja manjši od 1, enak 1 ali pa večji od 1.

Literatura

- [1] BOLTEŽAR M.: Mehanska nihanja 1. del, druga izdaja, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010
- [2] SLAVIČ J.: Dinamika, mehanska nihanja in mehanika tekočin, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2014
- [3] KUHELJ A. ML.: Mehanika, Dinamika, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1998
- [4] MURŠIČ M.: Osnove tehniške mehanike 3, Dinamika, Akademska založba, Ljubljana, 1991
- [5] STROPNIK J.: Mehanika- Laboratorijske vaje, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1985
- [6] STROPNIK J.: Hidromehanika, TZS Ljubljana, Ljubljana, 1999
- [7] KEITH F.: Fluid Mechanics, CRC Press, New York, 1999
- [8] INTERNETNI VIR: https://vanoengineering.wordpress.com/2012/12/30/head-loss-coefficients/, ogledano avgusta 2017.