

# 1 Analitična statika

## 1.1 Namen vaje

Pri reševanju realnih problemov se principi Lagrangeve mehanike pogosto izkažejo kot zelo uporabni. Enega izmed področij, na katerem jih je smiselno aplicirati, predstavlja določevanje ravnotežnih stanj sistemov z več prostostnimi stopnjami, ki jih pri predmetu obravnavamo pod imenom analitična statika.

Namen vaje je teoretično znanje s področja analitične statike aplicirati na poenostavljenem modelu roke, ki je predstavljen na sliki 1. Izvedba vaje sestoji iz praktične obravnave mehanskega sistema roke in z analizo njenega fizikalnega modela. Obravnavali bomo dva različna obremenitvena primera in primerjali realno ter izračunano ravnotežno stanje obravnavanega sistema.



Slika 1: Poenostavljeni model roke.

## 1.2 Fizikalni model obravnavanega sistema

Fizikalni model roke je shematsko prikazan na sliki 2 in sestoji iz dveh členkastih povezav, dveh togih teles in povezovalne vzmeti. Gre za sistem z dvema prostostnima stopnjama, pri čemer si je za neodvisni koordinati smiselno izbrati zasuka posameznih togih teles  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$ . V odvisnosti od izbranih koordinat lahko  $y$ -komponento težišča posameznega togega telesa zapišemo kot<sup>1</sup>:

$$y_{T_1} = -r_1 \cos \varphi_1, \quad (1)$$

$$y_{T_2} = -L_1 \cos \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2. \quad (2)$$

V odvisnosti od izbranih koordinat je potrebno izraziti tudi raztezek vzmeti. Razdaljo med osema vpetišč vzmeti  $c$  določimo s pomočjo kosinusnega izreka, za določitev raztezka  $\Delta c$  pa tej vrednosti odštejemo začetno dolžino vzmeti  $c_0$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(90^\circ - \varphi_1 - \alpha - \beta + \varphi_2), \quad (3)$$

$$\Delta c = c - c_0. \quad (4)$$

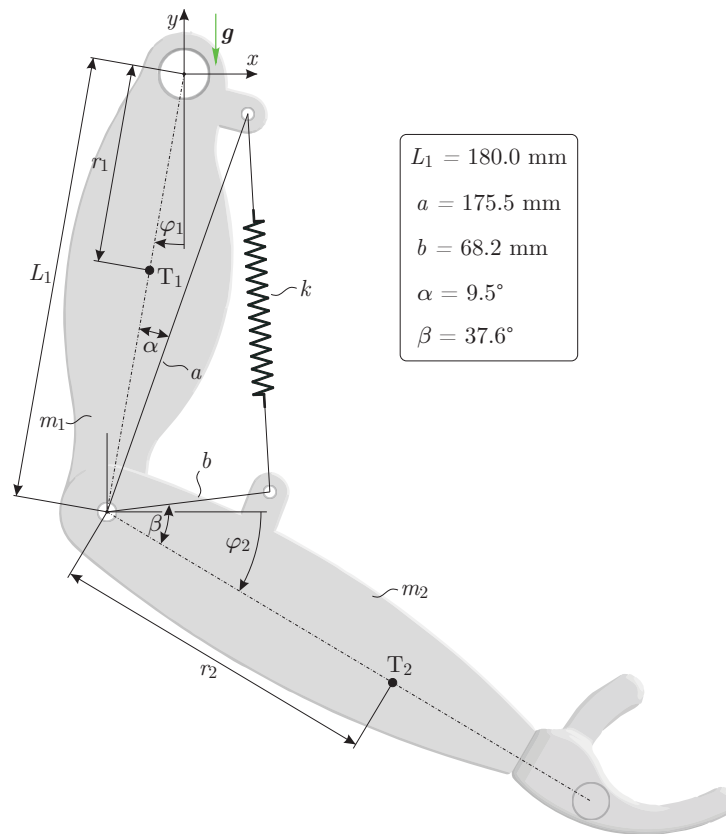
Izraz za potencialno energijo sistema se tako glasi:

$$E_p = m_1 g y_{T_1} + m_2 g y_{T_2} + \frac{k \Delta c^2}{2}. \quad (5)$$

Ker gre za konzervativni sistem, lahko ravnotežno stanje določimo s pomočjo naslednjega stabilnostnega kriterija:

$$-\frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

<sup>1</sup>Fizikalni model poenostavljeno obravnava položaj težišč posameznih togih teles, pri čemer predpostavlja, da se  $T_1$  nahaja na premici, ki povezuje osi obeh členkov,  $T_2$  pa na premici, ki povezuje osi povezovalnega članka in valjaste vzmeti, ki je nameščena v dlani modela.



Slika 2: Fizikalni model.

### 1.3 Navodila za izvedbo vaje

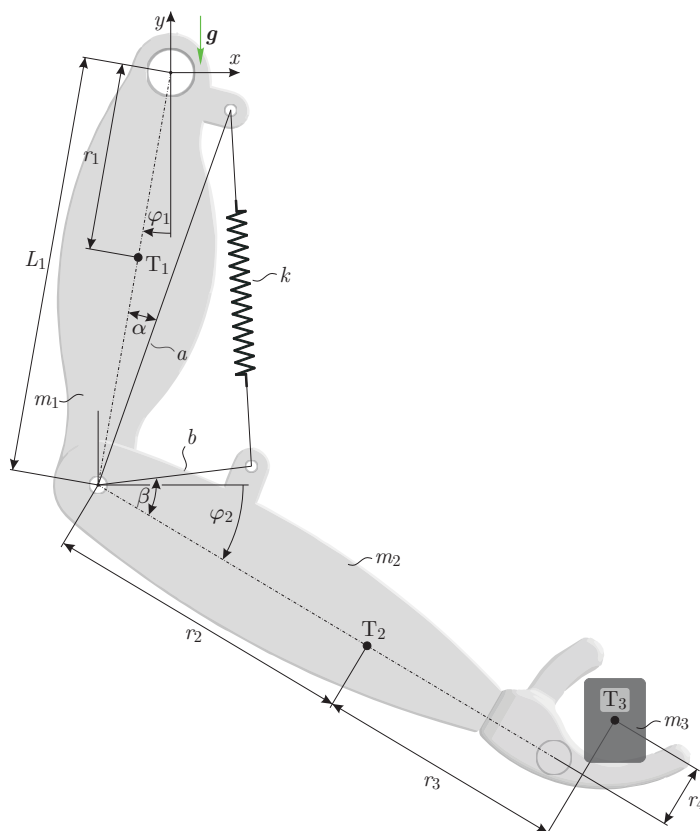
1. Določitev neznanih parametrov fizikalnega modela.
  - a) Razstavite obravnavani model, tako da boste imeli na voljo ločene komponente (nadlaket, podlaket in tri zaporedno vezane vzmeti).
  - b) Izmerite dolžino zaporedno vezanih vzmeti v nedeformirani konfiguraciji  $c_0$  in s pomočjo uteži določite njihovo skupno togost  $k$ .
  - c) Z uporabo tehtnice določite mase posameznih komponent  $m_1$  in  $m_2$ .
  - d) Za posamezni komponenti sistema (nadlaket, podlaket) preverite smiselnost poenostavljene obravnave položaja težišč, kot je opisana v opombi 1. S tehniko obešanja ocenite parametra  $r_1$  in  $r_2$ .
2. Obravnava fizikalnega modela.
  - a) Na podlagi izpeljanega izraza za potencialno energijo sistema in določenih parametrov fizikalnega modela izpeljite pripadajoči ravnotežni enačbi.
  - b) Izberite ustrezno numerično metodo za reševanje pridobljenega sistema enačb in določite vrednosti  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  v ravnotežnem stanju sistema.
3. Eksperiment - prvi obremenitveni primer
  - a) Sestavite model roke in ga spustite v ravnotežno stanje. V prvem obremenitvenem primeru simuliramo roko v sproščenem stanju brez dodatne obremenitve.
  - b) Posnemite fotografijo ravnotežnega stanja in s pomočjo računalniškega programa (npr. <https://ij.imjoy.io/>) ocenite vrednosti  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  v ravnotežnem stanju sistema. Vrednosti primerjajte z rezultati, ki jih dobite na podlagi numeričnega modela.

4. Izvedba eksperimenta - drugo obremenitveno stanje

- a) V primeru drugega obremenitvenega stanja bomo obravnavali roko, ki prenaša dodatno obremenitev. Stanje napete mišice simulirajte s povečanjem togosti vzmeti (odstranite eno izmed zaporedno vezanih vzmeti) in na dlan položite dodatno utež. Posnemite fotografijo ravnotežnega stanja in s pomočjo programa za obdelavo slik ocenite vrednosti  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  v ravnotežnem stanju sistema.

5. Prilagoditev numeričnega modela.

- a) V skladu z izvedenimi spremembami na realnem modelu ustrezno nadgradite vaš numerični model in izračunajte ravnotežni vrednosti  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  za drugo obremenitveno stanje. Primerjajte numerično in eksperimentalno pridobljene rezultate. Pri tem si pomagajte s sliko 3.



Slika 3: Fizikalni model - obremenitveno stanje 2.

1.4 Rezultati

Pridobljene rezultate vpišite v spodnjo preglednico:

	Obremenitveno stanje 1		Obremenitveno stanje 2	
	Izračunana vrednost	Eksperimentalna vrednost	Izračunana vrednost	Eksperimentalna vrednost
$\varphi_1 [^\circ]$				
$\varphi_2 [^\circ]$				

## 2 Analitična dinamika

### 2.1 Namen vaje

Spontana sinhronizacija je zanimiv naravni pojav, ki se pojavi pri populaciji oscilirajočih enot, med katerimi obstaja nek mehanizem interakcije. Christiaan Huygens je pojav na podlagi opazovanja dveh mehanskih ur popisal že v 17. stoletju, dandanes pa ga izkoriščamo tudi pri različnih inženirskih aplikacijah.

Namen vaje je predstaviti koncept spontane sinhronizacije in ga povezati s pridobljenim znanjem s področja analitične dinamike. Cilj je postaviti fizikalni model, s katerim je mogoče popisati pojav sinhronizacije dveh metronomov na skupni drsni podlagi. Obravnavani sistem je prikazan na sliki 4.



Slika 4: Metronoma na skupni drsni podlagi.

### 2.2 Fizikalni model obravnavanega sistema

Fizikalni model obravnavanega sistema je prikazan na sliki 5. Sestoji iz dveh metronomov in povezovalnega vozička, ki lahko prosto drsi po podlagi. Gre za sistem s tremi prostostnimi stopnjami, pri čemer si je za neodvisni koordinati smiselno izbrati zasuka nihala na metronomih  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  ter pomik drsne podlage  $x_3$ . Razdaljo med vpetiščem in težiščem nihala  $r$  lahko v odvisnosti od izbranih neodvisnih koordinat zapišemo kot:

$$r = \frac{-m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Pri izračunu vztrajnostnega momenta bomo zanemarili maso palice, uteži pa bomo obravnavali kot točkovni masi. Težiščni vztrajnostni moment nihala tako zapišemo kot:

$$J_T = m_1 (l_1 + r)^2 + m_2 (l_2 - r)^2. \quad (8)$$

V odvisnosti od izbranih koordinat lahko koordinate težišč posameznih nihala izrazimo kot<sup>2</sup>:

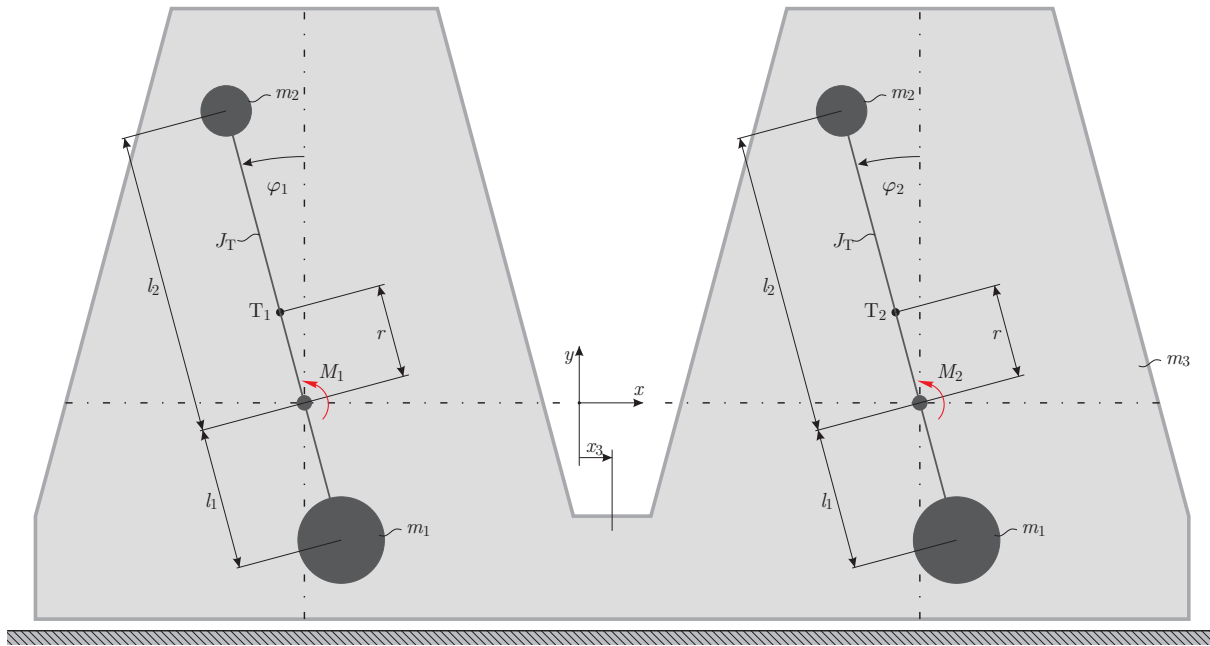
$$x_{T_1} = x_3 - r \sin \varphi_1 + C_1, \quad (9)$$

$$y_{T_1} = r \cos \varphi_1, \quad (10)$$

$$x_{T_2} = x_3 - r \sin \varphi_2 + C_2, \quad (11)$$

$$y_{T_2} = r \cos \varphi_2. \quad (12)$$

<sup>2</sup> $C_1$  in  $C_2$  sta poljubni konstanti, ki popisujeta zamik metronomov v horizontalni smeri in ne vplivata na gibalne enačbe.



Slika 5: Fizikalni model.

Izraza za potencialno in kinetično energijo sistema zapišemo kot:

$$E_p = (m_1 + m_2) g y_{T_1} + (m_1 + m_2) g y_{T_2}, \quad (13)$$

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{x}_{T_1}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{y}_{T_1}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{x}_{T_2}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{y}_{T_2}^2 + \frac{1}{2} J_T \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_T \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (m_3) \dot{x}_3^2. \quad (14)$$

Vpliv pogonskega mehanizma metronoma na posamezno nihalo bomo obravnavali kot moment  $M_i$ , ki ga bomo poenostavljeno popisali z van der Polovim členom v obliki:

$$M_i = \epsilon \left( \left( \frac{\varphi_i}{\phi_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\varphi}_i; \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

kjer člen za vrednosti  $\varphi_i < \phi_0$  kotno hitrost povečuje in jo zmanjšuje za  $\varphi_i > \phi_0$ . Za majhne vrednosti  $\epsilon$  bo tak člen povzročil ustaljeno nihanje nihala z amplitudo približno  $2\phi_0$ . Parameter  $\epsilon$  vpliva na trajanja vzpostavitve stabilnega stanja, glede na opazovanje realnega sistema pa se kot primerno izkaže privzeti vrednost  $\epsilon = 0.0001 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ .

Za obravnavani sistem s tremi prostostnimi stopnjami lahko izpeljemo tri gibalne enačbe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -M_1, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -M_2, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0, \quad (18)$$

kjer  $L$  predstavlja Lagrangeovo energijsko funkcijo, ki jo zapišemo kot razliko kinetične in potencialne energije  $L = E_k - E_p$ .

Potrebno je omeniti tudi, da je za pojav spontane sinhronizacije potrebna zadostna stopnja interakcije med komponentami sistema. Torej, vpliv dinamike nihala mora vzbuditi nihanje skupne podlage, kar v obravnavanem primeru poskušamo doseči s čim večjo frekvenco nihala, manjšanjem mase preostalih komponent in čim nižjo stopnjo trenja.

## 2.3 Navodila za izvedbo vaje

1. Analiza delovanja metronoma.
  - a) Za različne začetne pogoje analizirajte ustaljen odziv nihala metronoma in opažanja primerjajte s fizikalno razlago van der Polovega člena za popis vpliva pogonskega mehanizma metronoma.
  - b) Na podlagi opazovanja ocenite vrednost parametra  $\phi_0$  (gre za približno za polovično vrednost amplitude ustaljenega nihanja metronoma).
2. Ocena parametrov fizikalnega modela.
  - a) Zaradi kompleksnosti sestava metronoma ne bomo razstavljali. Vrednosti parametrov  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $m_1$  in  $m_2$  glede na dostopnost izmerite oziroma ocenite na podlagi opazovanja.
  - b) S pomočjo tehtnice in ocenjenih vrednosti  $m_1$  in  $m_2$  določite vrednost parametra  $m_3$ .
3. Obravnava fizikalnega modela.
  - a) Na podlagi izpeljanih izrazov za potencialno in kinetično energijo sistema izpeljite gibalne enačbe.
  - b) Izberite ustrezno numerično metodo za reševanje izpeljanega sistema diferencialnih enačb. Izrišite časovni potek zasukov nihala  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  in bodite pozorni na morebiten pojav spontane sinhronizacije.
4. Izvedba eksperimenta
  - a) Eksperiment izvedite za štiri različne obratovalne primere:
    - i Omogočeno drsenje vozička, nizka frekvenca nihanja, poljuben začetni pogoj.
    - ii Omogočeno drsenje vozička, visoka frekvenca nihanja, začetni pogoj podoben za obe nihali.
    - iii Omogočeno drsenje vozička, visoka frekvenca nihanja, začetni pogoj nihala v protifazi.
    - iv Onemogočeno drsenje vozička, visoka frekvenca nihanja, poljuben začetni pogoj.

Za vsakega izmed teh primerov opazujte vedenje sistema in si zabeležite, ali je prišlo do sinhronizacije. V kolikor je odgovor pozitiven, si zabeležite tudi približen čas do sinhronizacije in morebitna dodatna opažanja.
5. Simulacija s pomočjo numeričnega modela:
  - a) Podobno vedenje, kot ste ga opazili pri vseh štirih različicah eksperimenta, poskusite simulirati z ustrezno nastavitvijo parametrov numeričnega modela:
    - i Parametre  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $l_1$  in  $l_2$  prilagodite tako, da bo frekvenca nihala nizka in opazujte čas, ki je potreben, da pride do sinhronizacije.
    - ii Parametre  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $l_1$  in  $l_2$  glede na zgornji primer prilagodite tako, da bo frekvenca nihala znatno višja in opazujte čas, ki je potreben, da pride do sinhronizacije.
    - iii Posebno pozornost namenite obravnavi možnosti sinhronizacije v protifazi, pri čemer numerično obravnavajte idealen primer in primer z majhno numerično razliko med začetnima pogojema posameznih nihala. Razmislite, ali gre (pri malo dušenih sistemih) pri sinhronizaciji v protifazi za stabilno ali labilno stanje.
    - iv Ker obravnavamo nedušen in popolnoma prosto vpet fizikalni model, je zmanjšanje interakcije med komponentami najlažje doseči z znatnim povečanjem vrednosti parametra  $m_3$ . Preverite, ali tudi v tem primeru (v razumnem času) pride do pojava spontane sinhronizacije.

## 2.4 Rezultati

Eksperimentalna opažanja za različne obratovalne primere:

	Sinhronizacija - DA/NE	Čas do sinhronizacije [s]	Dodatna opažanja oz. opombe
i			
ii			
iii			
iv			