Univerza v Ljubljani Fakulteta za strojništvo

LADISK – Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Višja dinamika

Rešene naloge iz analitične mehanike

Dr. Janko Slavič

22. avgust 2012

Zadnja različica se nahaja na: http://lab.fs.uni-lj.si/ladisk/data/pdf/PreizkusiVD.pdf

Uporabljamo $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

V treh korakih do uspeha

1. Spoznavanje zakonov (predavanja).
2. Spoznavanje pristopov, postopkov in principov reševanja (vaje).
3. Osvojitev znanja (lasten študij prve in druge točke).

Za uspeh je najpomembnejša tretja točka. Veliko uspeha pri študiju!

Opombe

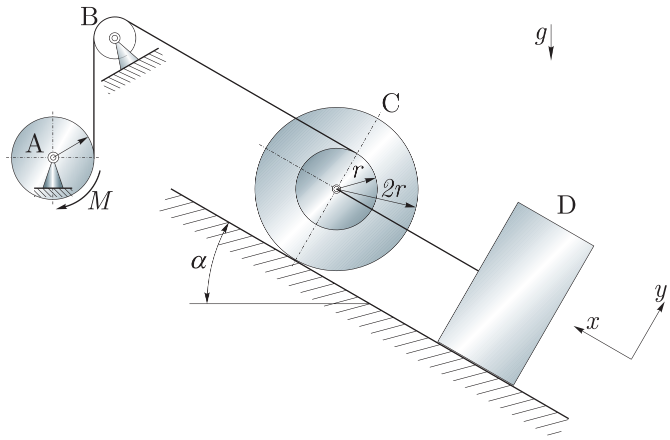
- Pri rešitvah nalog je postopek prikazan striktno analitično, pri opravljanju kolokvija/izpita se to ne pričakuje.
- Če nimate *Mathematice*, potem je ogled datotek mogoč z brezplačnim *MathematicaPlayer-jem*.

Kazalo

Poglavje 1

Analitična mehanika

1.1 (35 točk)



Na valj A polmera r in mase m deluje konstanten moment M. Preko vrvi in kolesa B zanemarljive mase poganja valj C polmera r in $2r$ in mase m. Na središče valja C pa je pripeto breme D mase m, ki drsi po klancu nagiba α. Valj C se kotali brez podrsavanja. Določite pospešek središča valja C in silo v vrvi med valjem C in bremenom D, če je sistem v začetku miroval. Uporabite D'Alambertov princip analitične dinamike.

$$\begin{aligned} m &= 1\,\mathrm{kg} & r &= 10\,\mathrm{cm} \\ J_\mathrm{C} &= m \cdot r^2 & M &= 10\,\mathrm{Nm} \\ \mu &= 0{,}2 & \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$

Rešitev

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\mathrm{C} &= 41{,}034\,\mathrm{m/s^2} \\ S &= 47{,}638\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima eno prostostno stopnjo (P=1), izberemo eno posplošeno koordinato (N=1): $q_1 = x_\mathrm{C}$. Ker se valj kotali brez podrsavanja, je zasuk valja C (φ_C) enolično odvisen od pomika valja x_C:

$$\varphi_\mathrm{C} = \frac{x_\mathrm{C}}{2\,r}.$$

Velja $x_\mathrm{D} = x_\mathrm{C}$. Iz geometrije sistema lahko zapišemo odvisnost med zasukoma valja A in C:

$$r\,\varphi_\mathrm{A} = 3\,r\,\varphi_\mathrm{C} \qquad \rightarrow \qquad \varphi_\mathrm{A} = 3\,\varphi_\mathrm{C} = \frac{3}{2}\,\frac{x_\mathrm{C}}{r}.$$

Uporabimo D'Alambertov princip in zapišemo ravnotežno enačbo gibanja:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i\,\ddot{\vec{r}}_i \right) \delta\vec{r}_i = 0.$$

Index i nam predstavlja telesa A, B, C, D, kjer kolo B izpustimo, saj ni zunanjih sil, ki bi opravljale virtualno delo in tudi ni vztrajnostne mase. Telo A opravlja samo rotacijsko gibanje, telo C rotacijsko in translatorno, telo D pa samo translatorno gibanje. Sledi:

$$(M - J_\mathrm{A}\,\ddot{\varphi}_\mathrm{A})\,\delta\varphi_\mathrm{A} + (-m\,g\,\sin\alpha - m\,\ddot{x}_\mathrm{C})\,\delta x_\mathrm{C} + (-J_\mathrm{C}\,\ddot{\varphi}_\mathrm{C}\,\delta\varphi_\mathrm{C}) + (-m\,g\,\sin\alpha - F_\mathrm{tr} - m\,\ddot{x}_\mathrm{D})\,\delta x_\mathrm{D} = 0.$$

Izraz preoblikujemo:

$$\left[\frac{3}{2}\,\frac{M}{r} - m\,g\,(2\,\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha) - \frac{27}{8}\,m\,\ddot{x}_\mathrm{C}\right]\,\delta x_\mathrm{C} = 0$$

Ker virtualni pomik δx_C ni enak nič, sledi:

$$\frac{27}{8}\,m\,\ddot{x}_\mathrm{C} = \frac{3}{2}\,\frac{M}{r} - m\,g\,(2\,\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha).$$

Pospešek valja C je torej:

$$\ddot{x}_\mathrm{C} = \frac{4}{9}\,\frac{M}{m\,r} - \frac{8}{27}\,g\,(2\,\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha).$$

Za izračun sile v vrvi nastavimo ravnotežje sil za telo C:

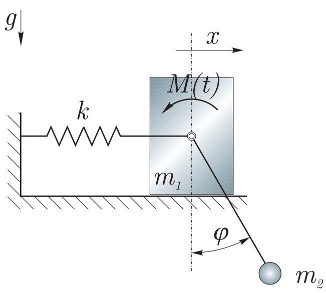
$$m\,\ddot{x}_\mathrm{C} = S - m\,g\,\sin\alpha - m\,g\,\mu\,\cos\alpha,$$

sledi, da je sila v vrvi:

$$S = m\,\left[\ddot{x}_\mathrm{C} + g\,(\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha)\right].$$

1.2 (35 točk)

Telo mase m_1 drsi po podlagi brez trenja. Nanj je s tankim drogom zanemarljive mase pripeto breme mase m_2, ki jo vzbujamo z momentom $M(t)$. Določite gibalni enačbi sistema. Uporabite Lagrangeve enačbe II. vrste.



$$\begin{aligned} m_1 &= 10\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 5\,\mathrm{kg} \\ k &= 100\,\mathrm{kN/m} \\ L &= 1\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Rešitev

$$\begin{aligned} x:&\quad (m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2\,l\,\left(\ddot{\varphi}\,\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi\right) = -k\,x \\ \varphi:&\quad m_2\,l\,\ddot{\varphi} + m_2\,l\,\ddot{x}\,\cos\varphi = M - m_2\,g\,l\,\sin\varphi \end{aligned}$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji ($P = 2$). Izberemo dve ($N = 2$) posplošeni koordinati: $q_1 = x, q_2 = \varphi$.

Gibalni enačbi bomo določili s pomočjo Lagrangeve enačbe 2. vrste[1]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_\mathrm{K}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_\mathrm{K}}{\partial q_j} = Q_j; \qquad j = 1, \ldots, N$$

[1] Hitrejše reševanje in manj možnosti za napako predstavlja uporaba izraza:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^\mathrm{N}; \qquad j = 1, \ldots, N$$

kjer so Q_j^N nekonservativne posplošene sile. Takšen postopek priporočen in je prikazan pri poznejših preizkusih.

Masa m_1 opravlja samo translatorno gibanje, masa m_2 pa translatorno in rotacijsko; ker pa obravnavamo maso m_2 kot masno točko, je kinetična energija rotacije enaka nič. Za določitev kinetične energije mase m_2 bomo potrebovali njeno absolutno hitrost, zato določimo najprej njen krajevni vektor:

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x + l\,\sin\varphi \\ l\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Hitrost mase m_2 je:

$$\dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} + l\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi \\ -l\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Absolutna hitrost mase m_2 torej je:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (\dot{x} + l\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi)^2 + (-l\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi)^2 \\ &= \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2\,\cos^2\varphi + 2\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,l\,\cos\varphi + l^2\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\varphi \\ &= \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\,l\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo kinetično energijo sistema:

$$E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\left(\dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\,l\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right) = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,l^2\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,l\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi$$

Posplošeni sili Q_x in Q_φ izračunamo s pomočjo izraza:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j\,\delta q_j$$

Virtualno delo sistema je:

$$\begin{aligned} \delta W &= M\,\delta\varphi + m_2\,g\,\delta y_2 - k\,x\,\delta x = M\,\delta\varphi + m_2\,g\,(-l\,\sin\varphi)\,\delta\varphi - k\,x\,\delta x \\ &= (M - m_2\,g\,l\,\sin\varphi)\,\delta\varphi - k\,x\,\delta x \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} Q_x &= -k\,x \\ Q_\varphi &= M - m_2\,g\,l\,\sin\varphi. \end{aligned}$$

x)
Najprej obravnavamo posplošeno koordinato x:

$$\frac{\partial E_\mathrm{K}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\,\dot{x} + m_2\,l\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_\mathrm{K}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2\,l\,\ddot{\varphi}\,\cos\varphi - m_2\,l\,\dot{\varphi}^2\,\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial E_\mathrm{K}}{\partial x} = 0.$$

Prva diferencialna enačba torej je:

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2\,l\,\left(\ddot{\varphi}\,\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\,\sin\varphi\right) = -k\,x.$$

φ)
Posplošena koordinata φ:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{K}}}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\, l^2\, \dot{\varphi} + m_2\, l\, \dot{x}\, \cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{K}}}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\, l^2\, \ddot{\varphi} + m_2\, l\, \ddot{x}\, \cos\varphi - m_2\, l\, \dot{x}\, \dot{\varphi}\, \sin\varphi$$

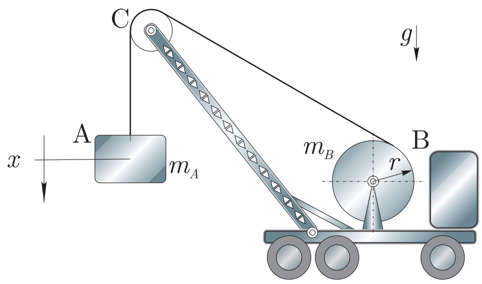
$$\frac{\partial E_{\mathrm{K}}}{\partial \varphi} = -m_2\, l\, \dot{x}\, \dot{\varphi}\, \sin\varphi$$

Druga diferencialna enačba je:

$$m_2\, l^2\, \ddot{\varphi} + m_2\, l\, \ddot{x}\, \cos\varphi = M - m_2\, g\, l\, \sin\varphi.$$

1.3 (35 točk)

Povprečen uspeh: 81%



Zaposleni ste v podjetju *Supertovorjak d.d.*. Tovornjak, ki ga konstruirate, je prikazan na sliki. Zanima vas dogajanje v primeru zloma gredi, ki povezuje pogon in navijalni valj.
Za narisan sistem: breme m_{A} – navijalni valj m_{B},r; izračunajte gibalno enačbo. Tovornjak miruje, maso kolesa C zanemarite.
Uporabite D'Alambertov princip.

Rešitev

$$\ddot{x}\left(m_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\, m_{\mathrm{B}}\right) - m_{\mathrm{A}}\, g = 0$$

Postopek

Ravnotežna enačba gibanja (D'Alambertov princip):

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \vec{F}_{i,\mathrm{v}}\right)\, \delta\vec{r}_i = 0,$$

za naš sistem to pomeni:

$$(F_{\mathrm{A}} + F_{\mathrm{A,v}})\, \delta x + (M_{\mathrm{B}} + M_{\mathrm{B,v}})\, \delta\varphi = 0.$$

Točk: 10

Zunanja sila na maso A in zunanji moment na valj B:

$$F_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}\, g,$$

$$M_{\mathrm{B}} = 0.$$

Vztrajnostne sile:

$$F_{\mathrm{A,v}} = -m_{\mathrm{A}}\, \ddot{x}$$

$$M_{B,v} = -J_B\,\ddot{\varphi}$$

Točk: 10

Povezava med pomikoma x in φ:

$$\varphi = \frac{x}{r} \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}, \quad \delta\varphi = \frac{1}{r}\,\delta x$$

Točk: 5

Sledi, da je gibalna enačba:

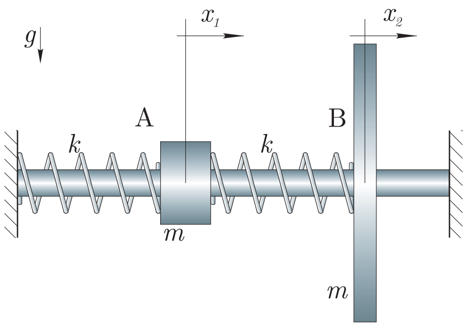
$$\ddot{x}\left(m_A + \frac{1}{2}\,m_B\right) - m_A\,g = 0$$

Točk: 10

Kje so imeli študentje težave?
Določevanje virtualnega dela rotacijske vztrajnosti in koordinate φ.

1.4 (35 točk)

Povprečen uspeh: 65%



Sistem na sliki je sestavljen iz elementov A in B, vsak mase m, ter dveh vzmeti enake togosti k. Na maso B zaradi velike površine deluje sila upora zraka: F_U. Zanemarite trenje med elementi in poiščite gibalne enačbe.
Uporabite Lagrangeve enačbe 2. vrste.

$$F_U = -\lambda\,\dot{x}_2$$

Rešitev

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 + (2\,x_1 - x_2)\,k &= 0 \\ m\,\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + \lambda\,\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji: $P = 2$, $N = 2$. Izberemo posplošeni koordinati: $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

Gibalni enačbi bomo določili s pomočjo Lagrangevih enačb 2. vrste[2]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j; \qquad j = 1, \ldots, N,$$

za naš sistem to pomeni:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = Q_1 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial E_k}{\partial x_2} = Q_2.$$

Točk: 5

V zgornji enačbi moramo določiti kinetično energijo sistema in posplošeni sili Q_1 in Q_2.
Kinetična energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_2^2$$

Točk: 5

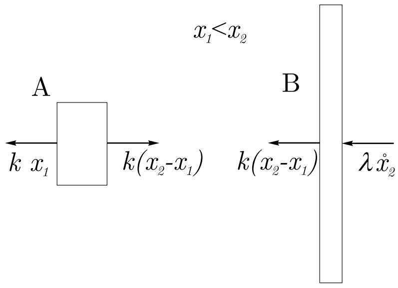
Posplošeni sili izračunamo s pomočjo virtualnega dela aktivnih sil, ki je enako virtualnemu delu posplošenih sil:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \, \delta q_j$$

Točk: 5

Virtualno delo:

$$\delta W = F_1 \, \delta x_1 + F_{\mathrm{A}2} \, \delta x_1 + F_{\mathrm{B}2} \, \delta x_2 + F_{\mathrm{U}} \, \delta x_2$$



Slika 1.1: Prikaz sil na masi A in B.

Ob predpostavki $x_1 < x_2$ so posamezne sile (slika 1.1):

$$\begin{aligned} F_1 &= -k\, x_1 \\ F_{\mathrm{A}2} &= +k\,(x_2 - x_1) \quad \text{sila vzmeti med masama na maso A} \\ F_{\mathrm{B}2} &= -k\,(x_2 - x_1) \quad \text{sila vzmeti med masama na maso B} \\ F_{\mathrm{U}} &= -\lambda\, \dot{x}_2. \end{aligned}$$

Iz virtualnega dela:

$$\delta W = (-2\, x_1 + x_2)\, k\, \delta x_1 + (-k(x_2 - x_1) - \lambda\, \dot{x}_2)\, \delta x_2$$

sledita posplošeni sili:

$$Q_1 = (-2\, x_1 + x_2)\, k$$

$$Q_2 = -k(x_2 - x_1) - \lambda\, \dot{x}_2$$

Točk: 10

Za izračun ravnotežja potrebujemo še odvode kinetične energije:

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} = m\, \dot{x}_1 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} = m\, \dot{x}_2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} = m\, \ddot{x}_1 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} = m\, \ddot{x}_2$$

Točk: 5

[2] Hitrejše reševanje (vzmeti ni treba "rezati") in manj možnosti za napako predstavlja uporaba izraza:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{N}}; \qquad j = 1, \ldots, N$$

kjer so Q_j^{N} nekonservativne posplošene sile. Takšen postopek priporočen in je prikazan pri poznejših preizkusih.

Gibalni enačbi torej sta:

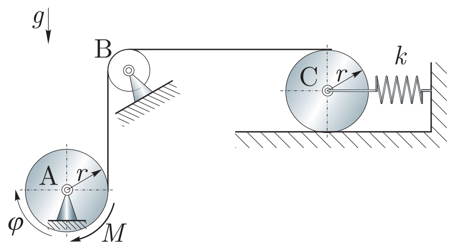
$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 + (2\,x_1 - x_2)\,k &= 0 \\ m\,\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + \lambda\,\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Določitev posplošene sile Q_1, Q_2, predvsem pri vplivu srednje vzmeti.

1.5 (30 točk)

Povprečen uspeh: 62%



Na sliki je prikazan sistem dveh enakih valjev A in C, ki imata polmer r. Valj A je z neraztegljivo vrvjo zanemarljive mase preko kolesa zanemarljive mase B povezan z valjem C. V vrtišču valja C je pripeta vzmet togosti k. Valj C nakotaljuje brez podrsavanja.
S pomočjo analitične mehanike izračunajte raztezek vzmeti v statični ravnovesni legi, če na valj A delujemo s konstantnim momentom M.

Podatki: r, k, M

Rešitev

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{2\,M}{r\,k}$$

Postopek

Sistem je ne-konservativen in ima eno prostostno stopnjo (N=P=1): $q_1 = \varphi$. Da izračunamo ravnotežno stanje, moramo najprej določiti virtualno delo sistema:

$$\delta W = \sum_i^n \boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i.$$

Točk: 5

Kot zunanji aktivni sili tukaj razumemo moment M in silo vzmeti F_{v} (sila trenja pod valjem C je sicer zunanja, vendar ne opravlja dela - ni aktivna). Virtualno delo torej je:

$$\delta W = M\,\delta\varphi + F_{\mathrm{v}}\,\delta x_{\mathrm{C}},$$

Točk: 10

kjer je x_{C} premik valja C v smeri raztegovanja vzmeti; posledično negativni predznak sile pri sila vzmeti:

$$F_{\mathrm{v}} = -k\,x_{\mathrm{C}}$$

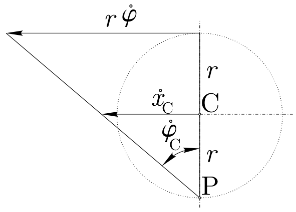
Iz geometrije definiramo (slika 1.2):

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\,r\,\varphi.$$

Izračunamo virtualni pomik koordinate x_{C}:

$$\delta x_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\,r\,\delta\varphi.$$

Točk: 5



Slika 1.2: Prikaz profila hitrosti za valj C; P – pol hitrosti.

Izračunano virtualno delo primerjamo z virtualnim delom v posplošenem prostoru:

$$\delta W = \sum_j^N Q_j\,\delta q_j = Q_\varphi\,\delta\varphi$$

in razberemo posplošeno silo:

$$Q_\varphi = M - \frac{1}{2}\,k\,x_C\,r.$$

Točk: 5

Iz pogoja za statično ravnotežje $\delta W = 0$ ob ne-ničnem virtualnem pomiku $\delta\varphi$ mora veljati $Q_\varphi = 0$, iz česar sledi raztezek vzmeti:

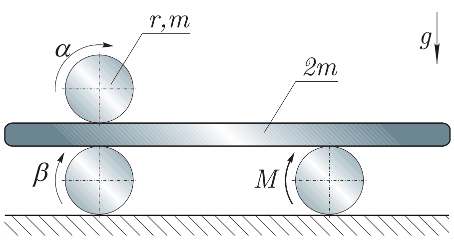
$$x_C = \frac{2\,M}{r\,k}.$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Zakaj so nekateri iskali *gibalne* enačbe (iščemo vendar statično ravnotežje)? Napačna povezava med koordinatama $x_C \sim \varphi$. Če vrv ni napeta ima sistem dve prostostni stopnji, vendar takrat ne gre več za obravnavani sistem.

1.6 (40 točk)

Povprečen uspeh: 51%



Na sliki je prikazan dinamski sistem, ki je sestavljen iz treh valjev (vsak mase m in polmera r) in jeklene plošče mase $2\,m$. Kakor je prikazano na sliki, deluje na enega od valjev zunanji moment M. Vsi valji nakotaljujejo brez podrsavanja.
Z uporabo *Lagrangevih enačb* 2. vrste poiščite gibalne enačbe sistema. Uporabite koordinati α in β.

Podatki: r, m, M

Rešitev

$$\begin{aligned} 3\,\ddot\alpha + 4\,\ddot\beta &= 0 \\ 2\,\ddot\alpha + 15\,\ddot\beta &= \frac{M}{m\,r^2}. \end{aligned}$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji: $P = 2$, $N = 2$. Izberemo posplošeni koordinati: $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$.

Gibalni enačbi bomo določili s pomočjo Lagrangevih enačb 2. vrste:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{N}}; \qquad j = 1, \ldots, N,$$

kjer so Q_j^{N} nekonservativne sile.
Lagrangeva energijska funkcija $L = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{p}}$ v potencialni energiji vsebuje konservativne (potencialne) sile; ker se potencialna energija ne spreminja (odvodi so torej nič), lahko zapišemo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{N}}; \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Za obravnavani sistem to pomeni:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \alpha} = Q_\alpha^{\mathrm{N}} \qquad \text{in} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \beta} = Q_\beta^{\mathrm{N}}.$$

Točk: 5

Definirajmo torej kinetično energijo:

$$E_{\mathrm{k}} = 2\,E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{k3}},$$

Točk: 5

kinetična energija vsakega od valjev pod ploščo je:

$$E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{t1}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\dot{\beta}^2,$$

kjer je hitrost težišča:

$$v_{\mathrm{t1}} = r\,\dot{\beta}$$

in masni vztrajnostni moment valja:

$$J = \frac{1}{2}\,m\,r^2.$$

Točk: 5

Kinetična energija plošče je:

$$E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}\,(2\,m)\,v_{\mathrm{t2}}^2,$$

kjer je hitrost težišča (iz geometrije, s pomočjo pola hitrosti):

$$v_{\mathrm{t2}} = 2\,r\,\dot{\beta}.$$

Točk: 5

Določimo še kinetično energijo valja na plošči:

$$E_{\mathrm{k3}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{t3}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\dot{\alpha}^2,$$

kjer je hitrost težišča:

$$v_{\mathrm{t3}} = v_{\mathrm{t2}} + r\,\dot{\alpha}.$$

Točk: 5

Kinetična energija torej je:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{4}\,m\,r^2\,\left(3\,\dot{\alpha}^2 + 8\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta} + 30\,\dot{\beta}^2\right).$$

Izračunati moramo še posplošene nekonservativne sile. Najprej izračunamo virtualno delo nekonservativnih sil:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i = M\,\delta\beta.$$

Točk: 5

Izračunano virtualno delo primerjamo z virtualnim delom v posplošenem prostoru:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \sum_j Q_j^{\mathrm{N}}\,\delta q_i = Q_\alpha^{\mathrm{N}}\,\delta\alpha + Q_\beta^{\mathrm{N}}\,\delta\beta,$$

Razberemo nekonservativne posplošene sile:

$$Q_\alpha^{\mathrm{N}} = 0,$$

$$Q_\beta^{\mathrm{N}} = M.$$

Točk: 5

Izračunamo odvode:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\alpha} = \frac{1}{2}\,m\,r^2\,(3\,\dot\alpha + 4\,\dot\beta) \qquad \frac{\partial E_k}{\partial \dot\beta} = m\,r^2\,(2\,\dot\alpha + 15\,\dot\beta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot\alpha} = \frac{1}{2}\,m\,r^2\,(3\,\ddot\alpha + 4\,\ddot\beta) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot\beta} = m\,r^2\,(2\,\ddot\alpha + 15\,\ddot\beta)$$

Urejeni gibalni enačbi torej sta:

$$3\,\ddot\alpha + 4\,\ddot\beta = 0,$$

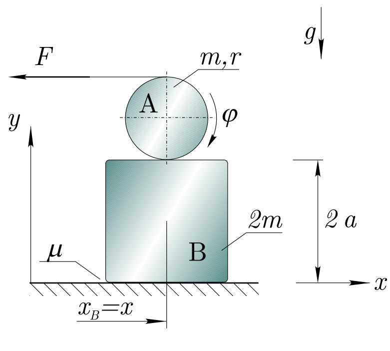
$$2\,\ddot\alpha + 15\,\ddot\beta = \frac{M}{m\,r^2}.$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Določitev kinetične energije in absolutnih hitrosti posameznih teles.

1.7 (35 točk)

Povprečen uspeh: 60%



Na valj A, ki se brez podrsavanja kotali po kocki B, je navita vrv. Če vrv vlečemo s konstantno silo F in je med kocko B in tlemi koeficient trenja μ, potem s pomočjo D'Alambertovega principa izpeljite gibalno/e enačbo/e sistema.
Uporabite koordinati x in φ. Predpostavite, da je trenje dovolj majhno, da kocka B drsi.
Podatki: F, a, r, m, g, μ

Rešitev

$$\begin{aligned} -3\,m\,\ddot x - r\,m\,\ddot\varphi + F - 3\,g\,m\,\mu &= 0 \\ -m\,r\,\ddot x - \frac{3}{2}\,m\,r^2\,\ddot\varphi + 2\,F\,r &= 0 \end{aligned}$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji (N=P=2): $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$. Da izračunamo dinamično ravnotežno stanje, moramo najprej določiti virtualno delo sistema:

$$\delta W = \sum_i^n \left(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{v},i}\right) \delta \boldsymbol{r}_i.$$

Nastavimo torej virtualno delo:

$$\delta W = \underbrace{\left(\boldsymbol{F}_\mathrm{A} + \boldsymbol{F}_\mathrm{v,A}\right) \delta \boldsymbol{r}_\mathrm{A}}_{\text{A - translacija}} + \underbrace{\left(M_\mathrm{A} + M_\mathrm{v,A}\right) \delta\varphi}_{\text{A - rotacija}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{F}_\mathrm{B} + \boldsymbol{F}_\mathrm{v,B}\right) \delta \boldsymbol{r}_\mathrm{B}}_{\text{B - translacija}} + \underbrace{\left(-F\,\delta x_\mathrm{F}\right)}_{\text{Sila } F}$$

Točk: 5

Posamezne zunanje aktivne sile so :

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N},$$

$$M_\mathrm{A} = 0\,\mathrm{Nm}$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -(m + 2\,m)\,g\,\mu \\ 0\,\mathrm{N} \end{pmatrix}.$$

Točk: 5

Opomba: Virtualno delo sile F bi lahko vključili tudi kot zunanjo aktivno silo in moment na težišče telesa A (translacija + rotacija!). V tem tem primeru bi se spremenila člena: $\boldsymbol{F}_\mathrm{A} = (-F, 0\,\mathrm{N})$, $M_\mathrm{A} = -2\,r\,F$.

Vztrajnostne sile so:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v,A} = \begin{pmatrix} -m\,\ddot{x}_\mathrm{A} \\ 0\,\mathrm{N} \end{pmatrix},$$

$$M_\mathrm{v,A} = -J\,\ddot{\varphi},$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v,B} = -2\,m\,\ddot{x}_\mathrm{B}.$$

Točk: 5

Poiščimo še krajevne vektorje:

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{B} \\ y_\mathrm{B} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{F} \\ y_\mathrm{F} \end{pmatrix}.$$

Točk: 5

Ker v y smeri ni zunanjih aktivnih sil (ki bi imele za posledico virtualno delo) nas koordinate $y_\mathrm{A}, y_\mathrm{B}, y_\mathrm{F}$ ne zanimajo več. Preostanejo koordinate:

$$x_\mathrm{A} = x + r\,\varphi,$$

$$x_\mathrm{B} = x,$$

$$x_\mathrm{F} = x + 2\,r\,\varphi.$$

Točk: 5

Izračunajmo sedaj še virtualne premike (po definiciji $\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$):

$$\delta x_\mathrm{A} = \delta x + r\,\delta\varphi,$$

$$\delta x_{\mathrm{B}} = \delta x,$$

$$\delta x_{\mathrm{F}} = \delta x + 2\,r\,\delta\varphi.$$

Točk: 5

Potem, ko uporabimo še $J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$, izpeljemo izraz za virtualno delo:

$$\delta W = \delta x\,\left(F - 3\,g\,m\,\mu - 3\,m\,\ddot{x} - m\,r\,\ddot{\varphi}\right) + \delta\varphi\left(2\,F\,r - m\,r\,\ddot{x} - \frac{3}{2}\,m\,r^2\,\ddot{\varphi}\right)$$

Ker je virtualno delo enako nič, posplošeni sili Q_x in Q_φ pa v splošnem nista, ob namišljenih pomikih $\delta x \neq 0, \delta\varphi = 0$ izpeljemo $Q_x = 0$:

$$-3\,m\,\ddot{x} - r\,\ddot{\varphi} + F - 3\,g\,m\,\mu = 0$$

. Ob namišljenih pomikih $\delta x = 0, \delta\varphi \neq 0$ pa izpeljemo $Q_\varphi = 0$:

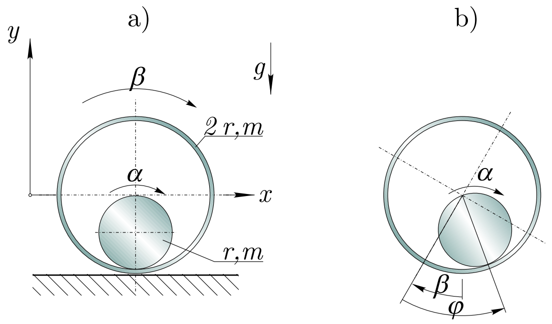
$$-m\,\ddot{x} - \frac{3}{2}\,m\,r^2\,\ddot{\varphi} + 2\,F\,r = 0$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Sistem ima dve prostostni stopnji! S translacijo gredo skupaj pomiki, z rotacijo pa zasuki.

1.8 (35 točk)

Povprečen uspeh: 56%



Na sliki je prikazan dinamski sistem, ki je sestavljen iz tankega obroča mase m in polmera $2\,r$ ($J_1 = m\,(2\,r)^2$) ter valja mase m in polmera r. Valj nakotaljuje brez podrsavanja znotraj obroča in tudi obroč nakotaljuje po podlagi brez podrsavanja.
Za prikazan sistem nastavite *Lagrangevo energijsko funkcijo*; torej: z danimi parametri in posplošenimi koordinatami definirajte Lagrangevo energijsko funkcijo, pri čemer nastavljenih hitrosti ni potrebno odvajati. Kot posplošeni koordinati uporabite absolutna zasuka α in β. Po potrebi si pomagajte s pomožno koordinato φ in enakostjo $\varphi = \alpha - \beta$, glejte sliko b).

Podatki: r, m, g

Rešitev

Postopek

Lagrangeva energijska funkcija je definirana kot:

$$L = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{p}}.$$

Kinetična energija je definirana kot:

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}}$$

kjer sta kinetični energiji obroča in valja:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 + \frac{1}{2}\, J_1\, \dot{\beta}^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\, m\, v_2^2 + \frac{1}{2}\, J_2\, \dot{\alpha}^2.$$

Točk: 5

Manjkajoče hitrosti so:

$$v_1 = \dot{x}_1,$$

Točk: 5

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}.$$

Točk: 5

Koordinate težišča obroča:

$$x_1 = 2\, r\, \beta, \qquad y_1 = 0$$

Točk: 5

in valja

$$x_2 = x_1 + r\, \sin(\varphi - \beta), \qquad y_2 = -r\, \cos(\varphi - \beta).$$

Povezava koordinate φ s posplošenimi koordinatami[3]:

$$\varphi = \alpha - \beta.$$

Točk: 10

Sedaj nastavimo še potencialno energijo (glede na to kako smo izbrali koordinatni sistem, je potencialna energija obroča enaka nič):

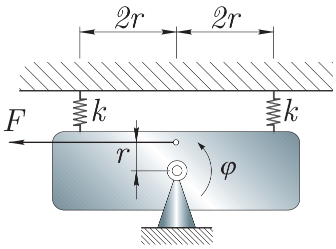
$$E_p = m\, g\, y_2.$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Valj opravlja translatorno in rotacijsko gibanje.

1.9 (35 točk)

Povprečen uspeh: 58%



Zaposleni ste v Tomosu in razmišljate o novem vpetju agregata na okvir mopeda. Model vpetja je prikazan na sliki: agregat se lahko vrti okoli težišča in je na okolico pritrjen z dvema vzmetema. Na agregat deluje sila F (sila, ki se preko verige prenaša na pogonsko kolo). S pomočjo analitične mehanike izračunajte statično ravnotežno lego in določite togost vzmeti k, da bo zasuk agregata $\varphi = 2{,}5°$.
Namig: upoštevajte teorijo majhnih zasukov in uporabite koordinato φ.
Podatki: $F = 200\,\text{N}$, $r = 5\,\text{cm}$.

[3] Izpeljava ni potrebna, pomoč za zainteresirane študente: velja $r\,\phi = 2\,r\,\varphi$, ϕ je relativni zasuk valja glede na obroč. Če se obroč ne vrti ($\beta = 0$, potem je absolutni zasuk valja: $\alpha^* = \phi - \varphi = (2-1)\varphi = \varphi$. V kolikor pa se suka tudi obroč, je absolutni zasuk valja: $\alpha = \alpha^* + \beta = \varphi + \beta$. Iz slednjega izraza izpeljemo odvisnost φ od posplošenih koordinat.

Rešitev

$$k = \frac{F}{8\,r\,\varphi} = 11459\,\mathrm{N/m}$$

Postopek

Sistem je ne-konservativen in ima eno prostostno stopnjo; za posplošeno koordinato izberemo: $q_1 = \varphi$. Da izračunamo statično ravnotežno stanje, moramo najprej določiti virtualno delo sistema:

$$\delta W = \sum_i^n \boldsymbol{F}_i\,\delta\boldsymbol{r}_i.$$

V splošnem bi morali množiti vektor sile z virtualnim pomikom krajevnega vektorja, ker pa so kot majhni lahko upoštevamo samo komponente, ki so aktivne (F v x smeri in vzmet v y smeri; xy je desno sučni koordinatni sistem):

$$\delta W = F\,\delta x_\mathrm{F} + F_\mathrm{vd}\,\delta y_\mathrm{d} + F_\mathrm{vl}\,\delta y_\mathrm{l}.$$

Točk: 5

Kjer so sile v vzmeteh (d-desna, l-leva):

$$F_\mathrm{vd} = -k\,(2\,r\,\sin\varphi) \qquad F_\mathrm{vl} = k\,(2\,r\,\sin\varphi).$$

Točk: 5

Definirati moramo še koordinate:

$$x_\mathrm{F} = -r\,\sin\varphi, \qquad y_\mathrm{d} = 2\,r\,\sin\varphi \qquad \textit{in} \qquad y_\mathrm{l} = -2\,r\,\sin\varphi.$$

Točk: 5

Virtualne pomike izračunamo po splošni formuli $\boldsymbol{r} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\,\delta q_j$, sledi:

$$\delta x_\mathrm{F} = -r\,\cos\varphi\,\delta\varphi, \qquad \delta y_\mathrm{d} = 2\,r\,\cos\varphi\,\delta\varphi \qquad \textit{in} \qquad \delta y_\mathrm{l} = -2\,r\,\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Točk: 5

Sledi izraz za virtualno delo:

$$\delta W = \left(F\,r\,\cos\varphi - 8\,k\,r^2\,\cos\varphi\sin\varphi\right)\,\delta\varphi,$$

ker več ne odvajamo, lahko izraz lineariziramo:

$$\delta W = \underbrace{\left(F\,r - 8\,k\,r^2\,\varphi\right)}_{Q_\varphi}\,\delta\varphi$$

Točk: 5

Ker je virtualno delo v statičnem ravnotežju enako nič, posplošena sila Q_φ pa v splošnem ni, ob namišljenem pomiku $\delta\varphi \neq 0$ sledi:

$$F\,r - 8\,k\,r^2\,\varphi = 0.$$

Točk: 5

Iz zgornje enačbe izpeljemo potrebno togost vzmeti:

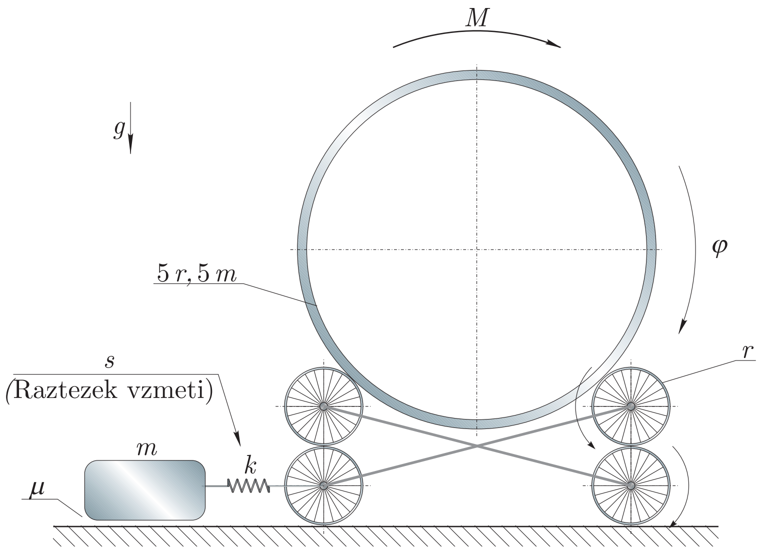
$$k = \frac{F}{8\,r\,\varphi}$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Nekateri so uporabili d'Alamberov princip in iskali *dinamično* in ne *statično* ravnotežje. Vsaki vzmeti je potrebno pripisati svojo koordinato! Zelo elegantna rešitev je s pomočjo potencialne energije za konservativne sile v vzmeteh in virtualnega dela za nekonservativno silo F.

1.10 (35 točk)

Povprečen uspeh: 49%



Kot študent FS razmišljate, da bi patentirali kolo, ki se poganja tako, da oseba teče znotraj obroča. Patent je skiciran na sliki: oseba teče znotraj velikega obroča (polmer $5\,r$ in mase $5\,m$), obroč leži na zanemarljivo lahkem sistemu koles (vsako polmera r), ki poskrbijo za prenos moči na podlago. Na kolo pripnete tudi breme, ki drsi po podlagi s trenjem μ.

Predpostavite, da oseba deluje na velik obroč z momentom M, uporabite prikazane koordinate in s pomočjo *Lagrangevih enačb* 2. vrste poiščite gibalne enačbe sistema.

Namig: masni vztrajnostni moment velikega obroča je: $J = 5\,m\,(5\,r)^2$.

Podatki: r, m, k, g, μ

Rešitev

$$5\,m\,r\,(g\,\mu - \ddot{s} + 55\,r\,\ddot{\varphi}) = M$$
$$m\,(g\,\mu - \ddot{s} + 5\,r\,\ddot{\varphi}) = k\,s$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji: $P = 2$, $N = 2$. Izberemo posplošeni koordinati: $q_1 = \varphi$, $q_2 = S$.

Gibalni enačbi bomo določili s pomočjo Lagrangevih enačb 2. vrste, za naš sistem to pomeni:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi^{\mathrm{N}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = Q_s^{\mathrm{N}}.$$

. Lagrangeva energijska funkcija je definirana kot: Točk: 10

$$L = E_\mathrm{k} - E_\mathrm{p}.$$

Kinetična energija je definirana kot:

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k1} + E_\mathrm{k2}$$

kjer sta kinetični energiji obroča in bremena:

$$E_\mathrm{k1} = \frac{1}{2}\,5\,m\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,J\,\dot{\varphi}^2$$

$$E_\mathrm{k2} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2.$$

Točk: 5

Manjkajoče hitrosti so:

$$v_1 = \dot{x}_1, \qquad x_1 = 5\,r\,\varphi,$$

$$v_2 = \dot{x}_2, \qquad x_2 = x_1 - s.$$

Točk: 5

V zgornjih enačbah je x_1 hitrost težišča obroča, x_2 pa hitrost težišča bremena; pozitiven s pomeni raztezek vzmeti.
Sedaj nastavimo še potencialno energijo (samo v vzmeti):

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\, k\, s^2.$$

Točk: 5

Manjkata še posplošeni sili, ki ju izračunamo s pomočjo virtualnega dela aktivnih sil, ki je enako virtualnemu delu posplošenih sil:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j\, \delta q_j$$

Virtualno delo:

$$\delta W = M\, \delta\varphi + (-m\, g\, \mu)\, \delta x_2,$$

Kjer je:

$$\delta x_2 = 5\, r\, \delta\varphi - \delta s.$$

Iz virtualnega dela:

$$\delta W = (M - 5\, g\, m\, r\, \mu)\, \delta\varphi + (g\, m\, \mu)\, \delta s.$$

Sledita posplošeni sili:

$$Q_\varphi^\mathrm{N} = M - 5\, g\, m\, r\, \mu$$

$$Q_s^\mathrm{N} = g\, m\, \mu$$

Točk: 5

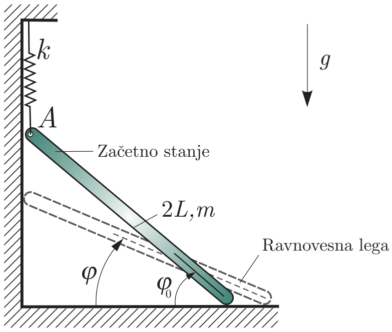
Za izračun ravnotežja potrebujemo še odvode Lagrangeve energijske funkcije L in izpeljemo gibalni enačbi.

$$\begin{aligned} 5\, m\, r\, (g\, \mu - \ddot{s} + 55\, r\, \ddot{\varphi}) &= M \\ m\, (g\, \mu - \ddot{s} + 5\, r\, \ddot{\varphi}) = k\, s & \end{aligned}$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Kinetična energija je vedno zapisana z absolutno hitrostjo; to velja predvsem predvsem za breme ($\dot{x}_2$)!
Virtualno delo sile trenja je potrebno povezati z (absolutnim) virtualnim premikom te sile δx_2.

1.11 (25 točk)



Sistem na sliki je sestavljen iz palice dolžine $2L$ in mase m ter vzmeti togosti k. Vzmet je v točki A pritrjena na palico in je neobremenjena tedaj, ko je palica v začetnem stanju pri kotu φ_0. Z uporabo analitične statike določite statično ravnovesno lego. Za popis lege palice uporabite označeni kot φ.

Podatki: m,L,k,φ_0

Rešitev

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4L^2k\sin\varphi_0 - mgL}{4L^2k}\right)$$

Postopek

Način 1
Ker je sistem konzervativen, je najenostavnejša rešitev z uporabo potencialne enrgije:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

Torej zapišemo potencialno energijo sistema:

$$E_p = m\,g\,\sin\varphi + \frac{1}{2}k\left(2L(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\right)^2$$

Zgornji izraz odvajamo pri čemer dobimo:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = \left(4L^2k(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\cos\varphi - mgL\cos\varphi\right)$$

Pogoj statičnega ravnotežja zahteva, da je posplošena sila $Q_\varphi = 0$:

$$\left(4L^2k(sin\varphi_0 - \sin\varphi) - m\,g\,L\right)\cos\varphi = 0$$

Netrivalno rešitev zgornje enačbe predstavlja izraz:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4L^2k\sin\varphi_0 - m\,g\,L}{4L^2k}\right)$$

Način 2
Izberemo posplošeno koordinato $q_1 = \varphi$. Uporabimo princip analitične statike in zapišemo enačbo za virtualno delo:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i$$

Index i predstavlja vse aktivne zunanje sile, ki delujejo na sistem. Na palico deluje sila teže in sila vzmeti. Virtualno delo zaradi obeh sil zapišemo v obliki:

$$\delta W = k\,\Delta L\,\delta y_A - m\,g\,\delta y_G$$

Z izbrano posplošeno koordinato φ sedaj zapišemo oba pomika virtualna pomika in raztezek vzmeti:

$$y_A = 2L\sin\varphi, \qquad \delta y_A = \frac{\partial y_A}{\partial\varphi}\delta\varphi = 2L\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$y_G = L\sin\varphi, \qquad \delta y_G = \frac{\partial y_G}{\partial\varphi}\delta\varphi = L\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\Delta L = 2L(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)$$

Dobljene izraze sedaj vstavimo v enačbo za virtualno delo:

$$\delta W = \underbrace{\left(4L^2k(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\cos\varphi - mgL\cos\varphi\right)}_{Q_\varphi}\delta\varphi$$

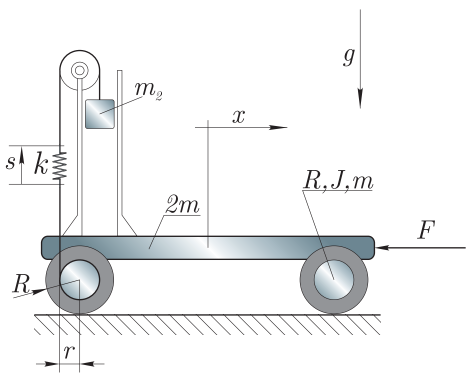
Pogoj statičnega ravnotežja zahteva $\delta W = 0$, kar pomeni da mora biti posplošena sila $Q_\varphi = 0$:

$$\left(4L^2k(sin\varphi_0 - \sin\varphi) - m\,g\,L\right)\cos\varphi = 0$$

Netrivalno rešitev zgornje enačbe predstavlja izraz:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4L^2k\sin\varphi_0 - m\,g\,L}{4L^2k}\right)$$

1.12 (50 točk)



Kot strojnik/ca ste si naredili na sliki prikazano vozilo.
Z uporabo Lagrengevih enačb II. vrste določite gibalne enačbe sistema.
Opombe: s je raztezek vzmeti, masa m_2 drsi v vodilu brez trenja, masni vztrajnostni moment posamezne osi skupaj s kolesom je J, njuna masa pa m. Karoserija ima maso $2\,m$. Bodite pozorni na absolutno gibanje mase m_2. Poskusite uporabiti koordinati x in s.
Navodilo: *a)* je sistem konzervativen? *b)* določite število prostostnih stopenj (pazite na vzmet) in izberite posplošene koordinate, *c)* določite Lagrangevo energijsko funkcijo in *d)* izpeljite gibalne enačbe.
Podatki: $F, m, m_2 = m, k, J = m\,r^2, R, r, g$.

Rešitev

$$\begin{aligned} R + m\,r\,\ddot{s} + m\left(\frac{3\,r^2}{R} + 5R\right)\ddot{x} - g\,m\,r &= -F \\ k\,s + m\left(-g + \ddot{s} + \frac{r\,\ddot{x}}{R}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Postopek

a), b)
Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji (P=2); izberemo posplošeni koordinati (N=P=2): $q_1 = x$, $q_2 = s$. Do gibalnih enačb pridemo z uporabo Lagrangevih enačb 2. vrste: Točk: 10

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{N}}; \qquad j = 1,\ldots,N.$$

Q_j^{N} je j-ta nekonservativna posplošena sila.
Za obravnavani primer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x^{\mathrm{N}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = Q_s^{\mathrm{N}}.$$

Točk: 5

c)
Določimo torej Lagrangevo energijsko funkcijo $L = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{p}}$; najprej določimo kinetično energijo:

$$E_{\mathrm{k}} = \left(\frac{1}{2}\,(2\,m)\,\dot{x}^2\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}\,(m)\,x^2 + \frac{1}{2}\,J\,\dot{\varphi}^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right),$$

Točk: 5

kjer je hitrost rotacije koles:

$$\varphi = \frac{x}{R}$$

in hitrost mase m_2:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Višina mase m_2 je:

$$y = cons - r\,\varphi - s.$$

Točk: 5

Nadaljujemo s potencialno energijo, ki je v potencialni energiji mase m_2 in v vzmeti:

$$E_{\mathrm{p}} = m\,g\,y + \frac{1}{2}\,k\,s^2.$$

Točk: 5

Lagrangeva energijska funkcija torej je:

$$L = -\frac{1}{2}\,k\,s^2 + m\,\dot{x}^2 - g\,m\left(cons - s - \frac{r\,x}{R}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{m\,r^2\,\dot{x}^2}{2\,R^2}\right) + \frac{1}{2}\,m\left(\dot{x}^2 + \left(-\dot{s} - \frac{r\,\dot{x}}{R}\right)^2\right)$$

d)
Potrebujemo še nekonservativne posplošene sile, ki jih določimo s pomočjo virtualnega dela nekonservativnih sil:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{N}}\,\delta\boldsymbol{r}_i = -F\,\delta x,$$

Točk: 5

Sledi, da je virtualno delo nekonservativnih sil definirano z:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \underbrace{-F}_{Q_x^{\mathrm{N}}}\,\delta x + \underbrace{0}_{Q_s^{\mathrm{N}}}\,\delta s.$$

Kakor je prikazano zgoraj, razberemo nekonservativne posplošene sile. Točk: 5

Izračunamo odvode:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{g\,m\,r}{R},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\,m\,\ddot{x} + 2\left(\frac{m\,\ddot{x}\,r^2}{R^2} + m\,\ddot{x}\right) + \frac{1}{2}\,m\left(2\,\ddot{x} - \frac{2\,r\,\left(-\ddot{s} - \frac{r\,\ddot{x}}{R}\right)}{R}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = g\,m - k\,s$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = -m\left(-\ddot{s} - \frac{r\,\ddot{x}}{R}\right).$$

Točk: 5

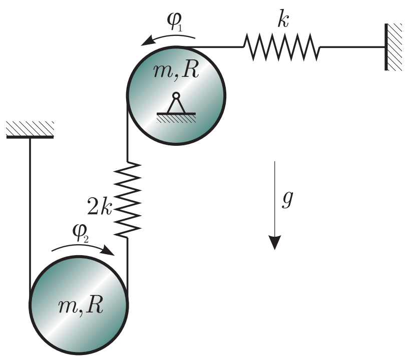
Gibalni enačbi torej sta:

$$R + m\,r\,\ddot{s} + m\left(\frac{3\,r^2}{R} + 5R\right)\ddot{x} - g\,m\,r = -F,$$

$$k\,s + m\left(-g + \ddot{s} + \frac{r\,\ddot{x}}{R}\right) = 0.$$

Točk: 5

1.13 (30 točk)



Sistem na sliki je sestavljen iz dveh valjev mase m in radija R, ki sta povezana z dvema vzmetema togosti k in $2k$. Z uporabo analitične mehanike in označenih koordinat izračunajte statično ravnovesno lego sistema. Vzmeti so v narisani legi v neobremenjenem stanju.
Podatki: m, R, k, g

Rešitev

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{m\,g}{k\,R}$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{8}\frac{m\,g}{k\,R}$$

Postopek

Možni so različni pristopi k reševanju, tukaj bo prikazan postopek z uporabo Dirichletovega stabilnostnega kriterija.
Sistem ima dve prostostni stopnji (P=2), pri čemer za posplošeni koordinati izberemo $q_1 = \varphi_1$ in $q_2 = \varphi_2$. Sistem je konzervativen, zaradi česar lahko izračunamo posplošene sile z odvajanjem potencialne energije po posplošenih koordinatah:

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1{,}2$$

Potencialna energija sistema ima obliko:

$$E_p = \frac{1}{2}k\,(R\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}2k\,(2\,R\,\varphi_2 - R\,\varphi_1)^2 - m\,g\,R\,\varphi_2$$

Točk: 10

Zgornji izraz odvajamo po posplošenih koordinatah:

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = -k\,R^2\varphi_1 + 2\,k\,R^2\,(2\,\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$Q_{\varphi_2} = -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = -4\,k\,R^2\,(2\varphi_2 - \varphi_1) + m\,g\,R$$

Točk: 10

Pogoj statičnega ravnotežja zahteva, da sta posplošeni sili enaki nič $Q_{\varphi_1} = 0$ in $Q_{\varphi_2} = 0$:

$$-k\,R^2\varphi_1 + 2\,k\,R^2\,(2\,\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$-4\,k\,R^2\,(2\varphi_2 - \varphi_1) + m\,g\,R = 0$$

Točk: 5

Iz zgornjih dveh enačb lahko izračunamo kot φ_1 in φ_2 v statični ravnovesni legi:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{m\,g}{k\,R}$$

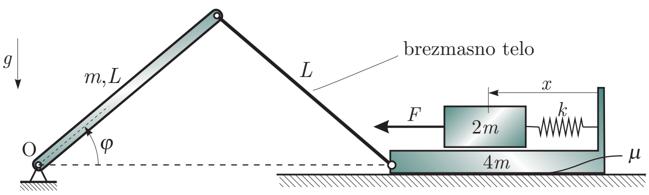
$$\varphi_2 = \frac{3}{8}\frac{m\,g}{k\,R}$$

Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Niso pravilno določili pola hitrosti spodnjega valja, zaradi česar so imeli težave pri izračunu relativnega raztezka vzmeti.

1.14 (40 točk)

Sistem na sliki je sestavljen iz palice mase m in dolžine L, ki je vrtljivo vpeta v točki O. Palica je preko ročice zanemarljive mase povezana z drsnikom mase $4m$. Med drsnikom in podlago je koeficient trenja μ. Na drsnik je preko vzmeti togosti k pripeta klada z maso $2m$ na katero deluje sila F. Med klado in drsnikom je trenje zanemarljivo.



Podatki: F, m, L, k, g.

Določite:

a) ali je sistem konzervativen,

b) število prostostnih stopenj, izberite posplošene koordinate in nastavite izraze za gibalne enačbe glede na Lagrangeve enačbe II.vrste,

c) določite Lagrangevo energijsko funkcijo in

d) določite posplošene sile nekonzervativnih sil.

Opombe: za zapis gibalnih enačb uporabite označene koordinate.

Rešitev

$$L = \frac{1}{2}\frac{m\,L^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}2\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}2\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{x})^2 - m\,g\,\frac{L}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$Q_{\varphi}^{\mathrm{N}} = (2\,F\,L\,\sin\varphi - 12\,m\,g\,\mu\,L\,\sin\varphi)$$

$$Q_{x}^{\mathrm{N}} = F$$

Postopek

Sistem je nekonservativen in ima dve prostostni stopnji (P=2); izberemo posplošeni koordinati (N=P=2): $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$. Do gibalnih enačb pridemo z uporabo Lagrangevih enačb 2. vrste:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{N}}; \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Q_j^{N} je j-ta nekonservativna posplošena sila.
Za obravnavani primer:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}^{\mathrm{N}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_{x}^{\mathrm{N}}.$$

Točk: 10

Določimo torej Lagrangevo energijsko funkcijo $L = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{p}}$; najprej določimo kinetično energijo:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} J_O \, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} 4\, m\, |\boldsymbol{v}_1^2| + \frac{1}{2} 2\, m\, |\boldsymbol{v}_2^2|$$

Hitrost drsnika in klade dobimo z odvajanjem pripadajočega krajevnega vektorja po času:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 2\,L\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 2\,L\,\cos\varphi - x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Kinetično energijo sistema lahko sedaj zapišemo v obliki:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\frac{m\,L^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}4\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}2\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{x})^2$$

Točk: 10

Nadaljujemo s potencialno energijo, ki je v potencialni energiji palice in vzmeti:

$$E_{\mathrm{p}} = m\,g\,\frac{L}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}k\,x^2.$$

Točk: 5

Lagrangeva energijska funkcija torej je:

$$L = \frac{1}{2}\frac{m\,L^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}2\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}2\,m\,(-2\,L\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{x})^2 - m\,g\,\frac{L}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}k\,x^2$$

Potrebujemo še nekonservativne posplošene sile, ki jih določimo s pomočjo virtualnega dela nekonservativnih sil:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{N}}\,\delta\boldsymbol{r}_i = -F\,\delta x_2 + F_{tr}\delta x_1 = -F\,\delta x_2 + 6\,m\,g\,\mu\,\delta x_1,$$

Točk: 10

Potrebno je izračunati virtualen x_1 in x_2:

$$x_1 = 2\,L\,\cos\varphi, \quad \delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial x_1}{\partial x}\delta x = -2\,L\,\sin\varphi\,\delta\varphi - 0\,\delta x$$

$$x_2 = 2\,L\,\cos\varphi - x, \quad \delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial x_2}{\partial x}\delta x = -2\,L\,\sin\varphi\,\delta\varphi - \delta x$$

Sledi, da je virtualno delo nekonservativnih sil definirano z:

$$\delta W^{\mathrm{N}} = \underbrace{(2\,F\,L\,\sin\varphi - 12\,m\,g\,\mu\,L\,\sin\varphi)}_{Q_{\varphi}^{\mathrm{N}}}\,\delta\varphi + \underbrace{F}_{Q_x^{\mathrm{N}}}\,\delta x.$$

Kakor je prikazano zgoraj, razberemo nekonservativne posplošene sile. Točk: 5

Kje so imeli študentje težave?
Krajevni vektor do sile F je enostavno absolutna koordinata. Za kinetično energijo klade je enostavno treba uporabiti absolutno hitrost njenega težišča.