Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo
Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Reševanje sistema diferencialnih enačb II. reda

Gregor Čepon, Martin Česnik

www.Ladisk.si

Ljubljana, 24. 3. 2020

Potek predstavitve

Diferencialna enačba II. reda

Teorija

Primer

Sistem diferencialnih enačb II. reda

Teorija

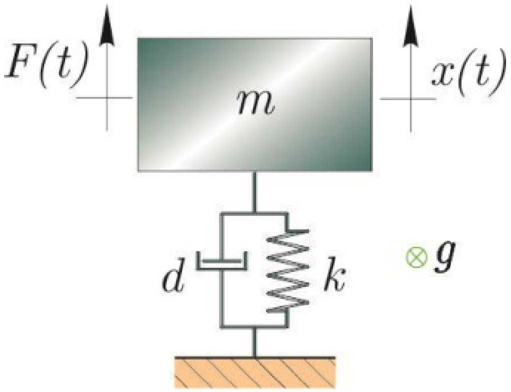
Primer

- Splošna diferencialna enačba II. reda

$$q_1(x,\dot{x})\ddot{x} + q_2(x,\dot{x})\dot{x} = f(x,\dot{x})$$

- Z uvedbo nove spremenljivke $x_1 = \dot{x}$ prevedemo na problem reševanje dveh diferencialnih enačb I. reda

$$\dot{x} = x_1$$
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{q_1(x,\dot{x})}\left(f(x,\dot{x}) - q_2(x,\dot{x})\dot{x}\right)$$



- Gibalna enačba

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F(t)$$

- Enačbo preuredimo

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(-d\dot{x} - kx + F(t))$$

- Z uvedbo nove spremenljivke $x_1 = \dot{x}$ ter dobimo:

$$\dot{x} = x_1$$
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}(-d\dot{x} - kx + F(t))$$

- Za reševanje uporabimo npr. metodo Runge-Kutta

- Splošna diferencialna enačba II. Reda

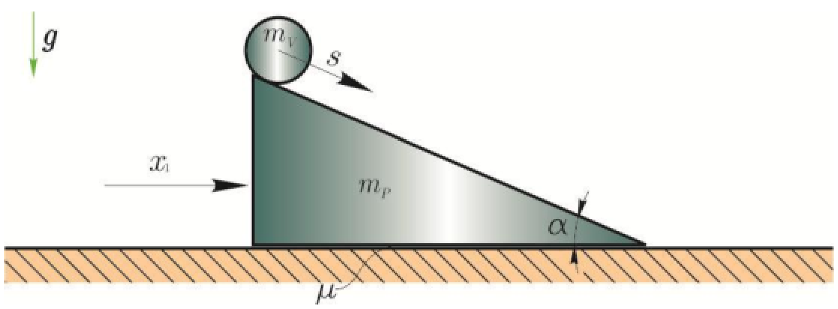
$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}(x,\dot{x}) \quad \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})^{-1}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$$

- Z uvedbo nove spremenljivke $\boldsymbol{x}_1 = \dot{\boldsymbol{x}}$ prevedemo problem na reševanje sistema diferencialnih enačb I. reda

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_1$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \mathbf{A}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})^{-1}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$$

- Za reševanje sistema uporabimo npr. metodo Runge-Kutta

- Valj na prizmi



- Gibalni enačbi

$$(m_P + m_V)\ddot{x}_1 + m_V(\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha)\ddot{s} = -\mu\cdot g(m_P + m_V)$$

$$m_V\cos\alpha\,\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m_V\ddot{s} = m_V g\sin\alpha$$

- Enačbi zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} m_P + m_V & m_V(\cos\alpha + \mu\cdot\sin\alpha) \\ m_V\cos\alpha & \frac{3}{2}m_V \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{s}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mu\cdot g(m_P + m_V) \\ m_V g\sin\alpha \end{Bmatrix}$$

- Enačbo zapišemo poenostavljeno v obliki:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$$

- Izrazimo $\ddot{\boldsymbol{x}}$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- Z uvedbo nove spremenljivke $\boldsymbol{x_1} = \dot{\boldsymbol{x}}$ prevedemo problem na reševanje sistema diferencialnih enačb I. reda

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x_1}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- Rešen problem v Python-u najdete tukaj