NIHANJE LINEARNIH MEHANSKIH SISTEMOV ZARADI UDARNE MOTNJE

dr. Miha Boltežar

2004

1 Uvod, umestitev predavanja

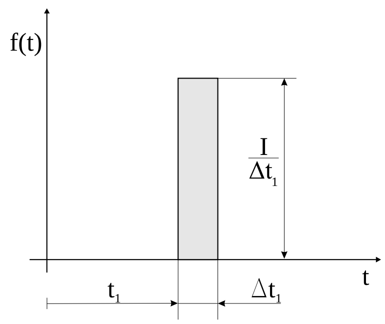
Linearna nihanja sistemov z 1 prostostno stopnjo	lastna	- nedeušena - dušena (viskozno)
	Vsiljena	- harmonska motnja -periodična motnja **- udarna motnja (prehodna)**
Nihanja sistemov z več pr. st.	Lastna ...	
Nihanje zveznih sistemov		

2 Metode obravnavanja

- predstavitev vzbujanja z FOURIER-jevim integralom
- **uporaba konvolucijskega integrala**
- uporaba metod Laplacove trasformacije
- aproksimacija vzbujevalne sile z interpolacijskom modelom ter nato uporaba konvolucije
- numerično integracija gibalnih enačb

3 Uporaba konvolucijskega integrala

3.1 Definicija enotskega impulza



Slika 1: Enotski impulz

Enotski impulz; Dirac-ova delta funkcija

$$\Delta t_1 \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{I}{\Delta t_1} \longrightarrow \text{preko vseh meja}$$

$$\delta(t-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{za vse } t \neq t_1 \\ \infty & \text{za } t = t_1, \end{cases}$$

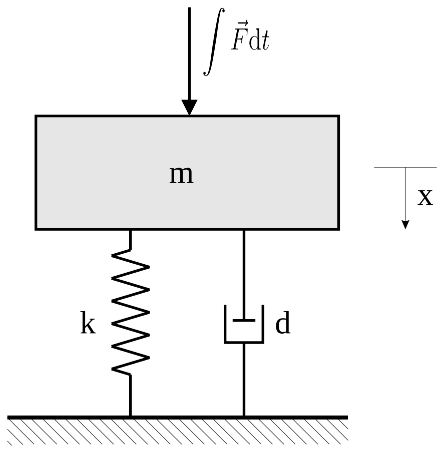
Integral produkta Diracove delta funkcije s poljubno funkcijo $f(t)$ je:

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t = f(t), \qquad 0 < t_1 < \infty$$

V posebnem primeru, če je $f(t) = 1$, pa:

$$\int_0^\infty \delta(t-t_1)\mathrm{d}t = 1, \qquad 0 < t_1 < \infty$$

3.2 Impulzna prenosna funkcija



Slika 2: Oscilator

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1,$$

kjer je

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

in

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{I}}{m}$$

Če vzbudimo oscilator na sliki 2 z impulzom $\vec{I}$, sta začetna pogoja:

1. $x(0) = 0$
2. $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$

a) **Nedušen oscilator;** $d = 0$

Gibalna enačba za nedušen oscilator na sliki 2:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Rešitev gibalne enačbe:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Iz začetnih pogojev izračunamo $A = 0$ in $B = \frac{I}{m\omega_0}$, zato je odziv sistema naslednji:

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Impulzna prenosna funkcija:

$$g(t) = \frac{x(t)}{I} = \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

b) **Dušen oscilator**

Gibalna enačba za dušen oscilator na sliki 2:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$

Rešitev gibalne enačbe:

$$x(t) = e^{-\delta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_{0d} t) + B\sin(\omega_{0d} t)\right]$$

Iz začetnih poogojev izračunamo konstanti A in B, ki sta enaki $A = 0$ in $B = \frac{I}{m\omega_{0d}}$.
Odziv sistema:

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_{0d}}e^{-\delta\omega_0 t}\sin(\omega_{0d} t)$$

Impulzna prenosna funkcija:

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_{0d}}e^{-\delta\omega_0 t}\sin(\omega_{0d} t)$$

4 Konvolucijski integral

Potrebne lastnosti sistema za uporabo konvolucijskega integrala so:

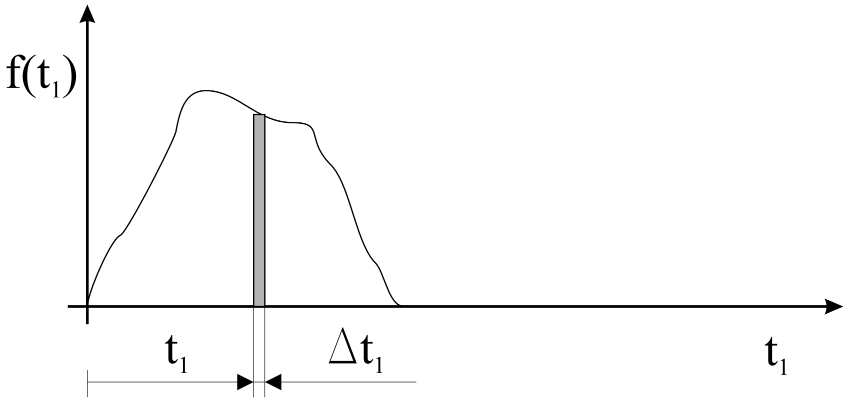
- Linearnost
- Časovna invariantnost
- Kavzalnost

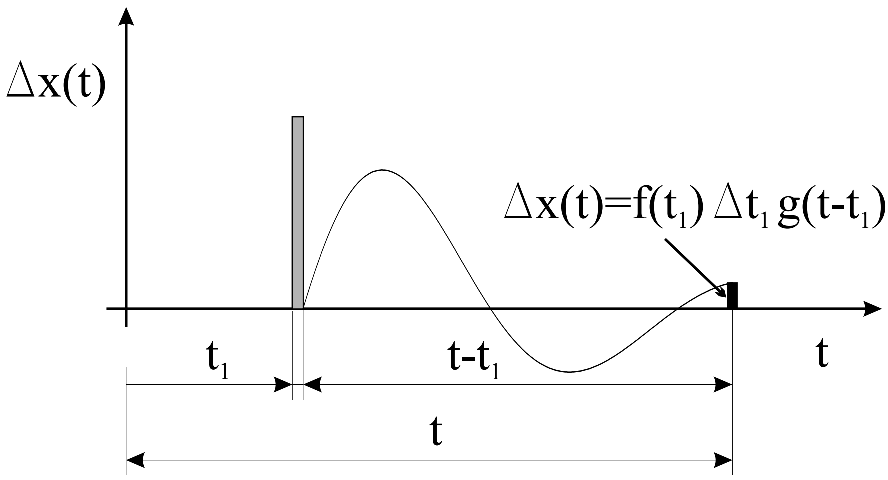
$$\Delta x(t) = f(t_1)\Delta t_1 g(t - t_1)$$

Sedaj z uporabo superpozicije dobimo

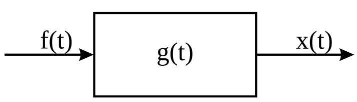
$$x(t) = \lim_{\Delta_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t - t_i)\Delta t_i = \int_0^t f(t_1)g(t - t_1)\mathrm{d}t_1$$

BOREL-ov teorem





4.1 Zapis konvolucije s pomočjo spominske spremenljivke τ



$$x(t) = \int\limits_{0}^{t} f(t_1)g(t-t_1)\mathrm{d}t_1$$

Splošneje lahko zapišemo:

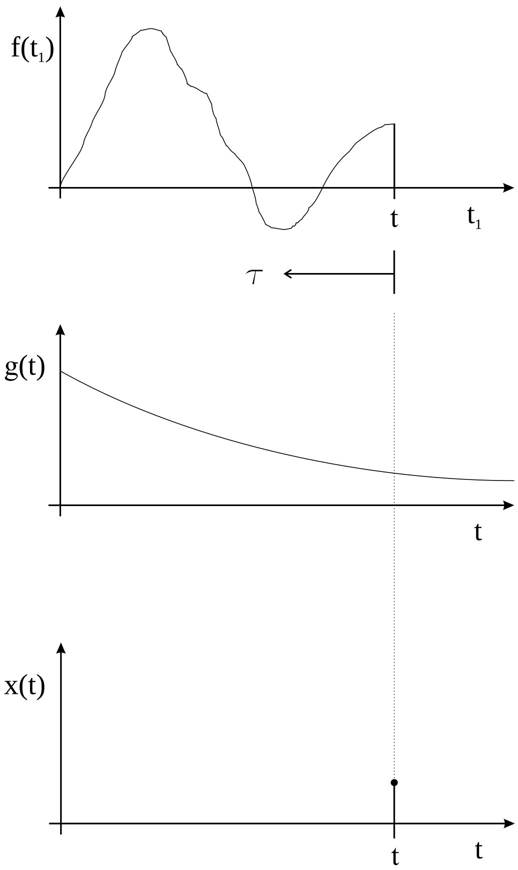
$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t_1)g(t-t_1)\mathrm{d}t_1$$

Sedaj uvedemo novo časovno spremenljivko $\tau = t - t_1$, $\mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}t_1$

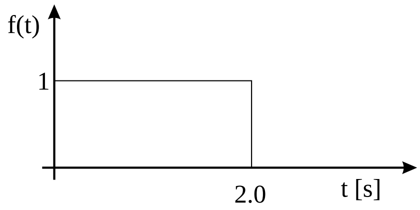
$$x(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Oznake
$x = f * g = g * f$
$x = f \circ g = g \circ f$
τ- spominska časovna spremenljivka
$g(\tau)$-dinamični spomin sistema (oscilatorja)

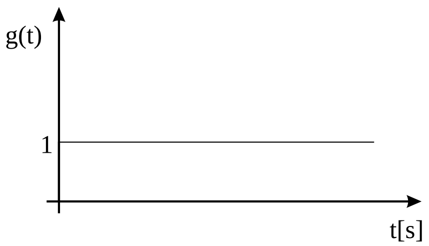


$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \lim_{\Delta\tau_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(t - i\Delta\tau)g(i\Delta\tau)\Delta\tau$$

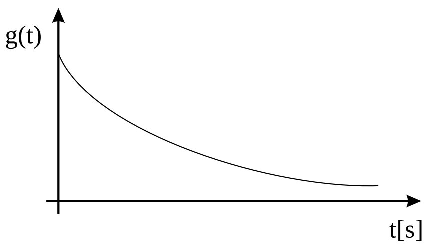


a)

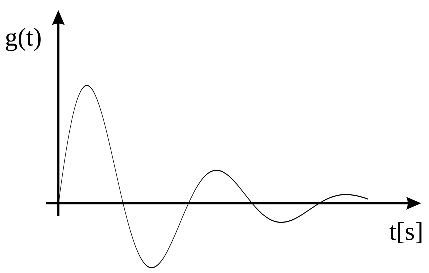
b)



c)

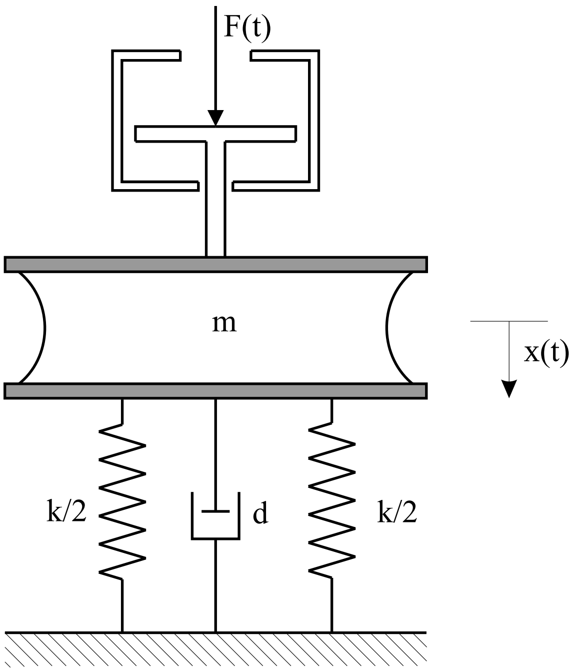


d)

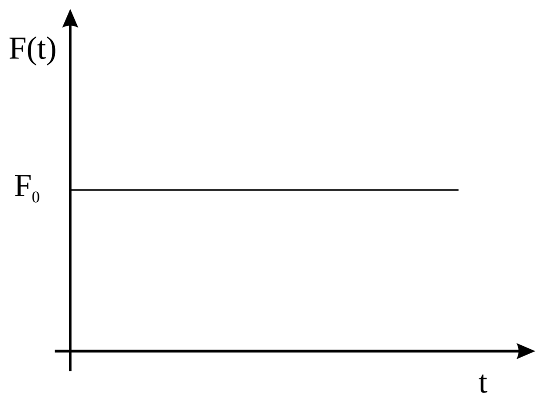


5 Zgledi

5.1 Zgled 1



Slika 3: Shematični prikaz stiskalnice.



Slika 4: Koračna sila.

Določi odziv stiskalnice, slika 3, na koračno silo in sicer za primera:

a) v primeru nedušenega sistema ter

b) v primeru dušenega sistema

Rešitev

a) Nedušen primer
Impulzna prenosna funkcija nedušenega oscilatorja je:

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t) \tag{1}$$

Odziv sistema dobimo z rešitvijo konvolucijskega integrala:

$$x(t) = \int_0^t f(t_1)g(t-t_1)\mathrm{d}t_1 \tag{2}$$

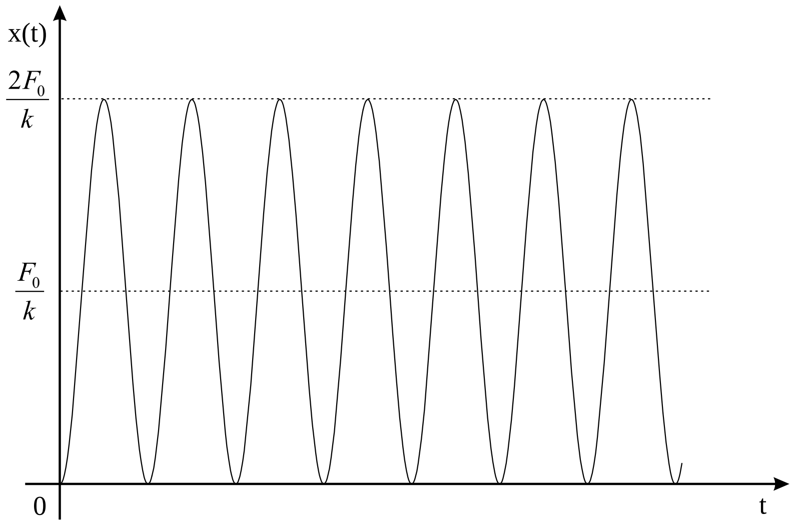
Pred tem še preuredimo impulzno prenosno funkcijo (1) v naslednjo obliko:

$$g(t-t_1) = \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_1)) \tag{3}$$

Sedaj z vstavitvijo izraza (3) v (2) in upoštevanjem, da je $f(t_1) = F_0$, izračunamo odziv sistema, ki je:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \tfrac{F_0}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t-t_1))\mathrm{d}t_1 \\ &= \tfrac{F_0}{m\omega_0}\left(\tfrac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0(t-t_1))\right)\Big|_0^t \\ &= \tfrac{F_0}{m\omega_0^2}(1-\cos(\omega_0 t)) \\ &= \tfrac{F_0}{k}(1-\cos(\omega_0 t)) \end{aligned} \tag{4}$$

Odziv je prikazan na sliki (5).



Slika 5: Odziv nedušene stiskalnice.

b) Dušen primer
Impulzna prenosna funkcija dušenega sistema je:

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_{0d}} e^{-\delta\omega_0 t} \sin(\omega_{0d} t) \tag{5}$$

Odziv sistema dobimo z rešitvijo konvolucijskega integrala:

$$x(t) = \int_0^t f(t_1) g(t - t_1) \mathrm{d}t_1 \tag{6}$$

Impulzno prenosno funkcijo (7) preuredimo v naslednjo obliko:

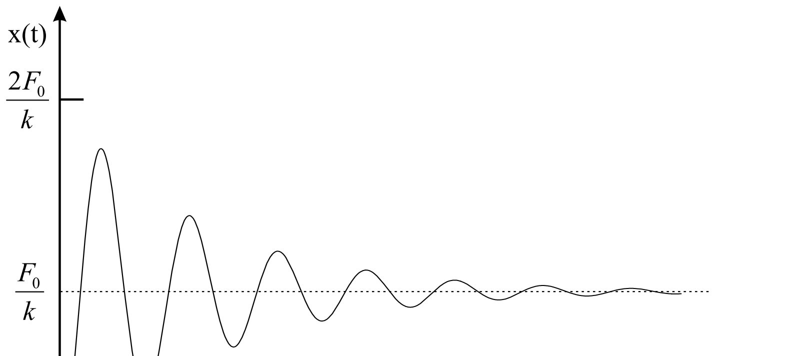
$$g(t - t_1) = \frac{1}{m\omega_{0d}} e^{-\delta\omega_0 (t - t_1)} \sin(\omega_{0d}(t - t_1)) \tag{7}$$

Odziv sistema podaja rešitev naslednjega integrala:

$$x(t) = \int_0^t F_0 \frac{1}{m\omega_{0d}} e^{-\delta\omega_0 (t - t_1)} \sin(\omega_{0d}(t - t_1)) \mathrm{d}t_1 \tag{8}$$

DN Rešite integral (8).

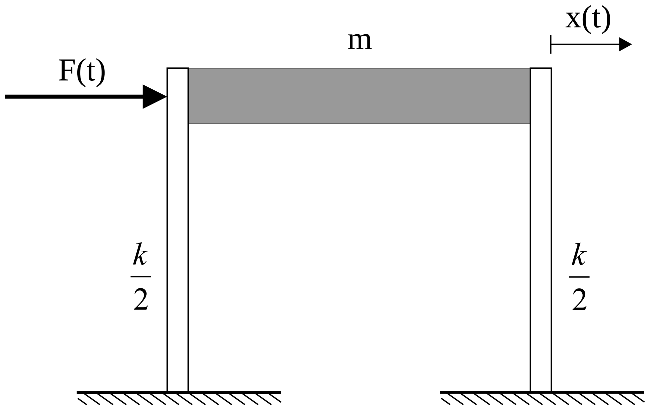
Odziv sistema prikazuje slika 6.



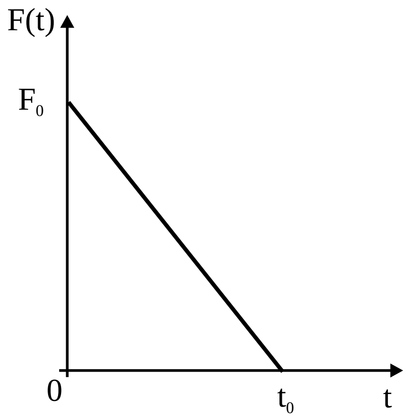
Slika 6: Odziv dušene stiskalnice.

5.2 ZGLED 2

Določitev odziva sistema na sliki 7 glede na silo, ki je prikaza na sliki 8.



Slika 7: Konzolno vpetje.



Slika 8: Potek sile.

Potek sile na sliki 8 lahko zapišemo na naslednji način:

$$f(t) = \begin{cases} F_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) & 0 \le t \le t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \tag{9}$$

Impulzna prenosna funkcija je:

$$g(t - t_1) = \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t - t_1)) \tag{10}$$

Odziv sistema podaja rešitev spodnjega integrala:

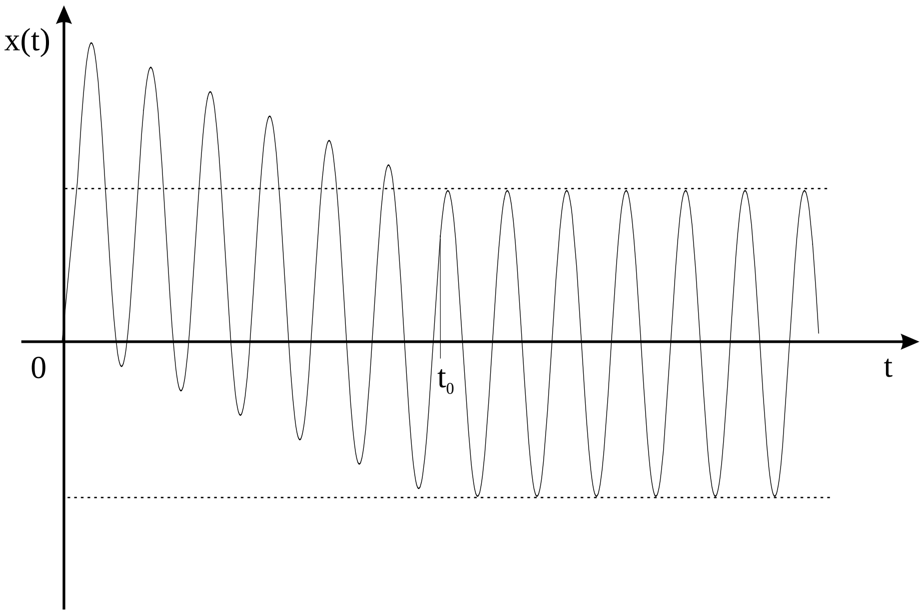
$$x(t) = \int\limits_0^t F_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t - t_1))\mathrm{d}t_1 \tag{11}$$

Odziv v času $0 \leq t \leq t_0$ je:

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{t}{t_0} - \cos(\omega_0) + \frac{1}{\omega_0 t_0}\sin(\omega_0 t)\right] \tag{12}$$

Odziv po času delovanja sile $f(t)$, torej za čas $t > t_0$ je:

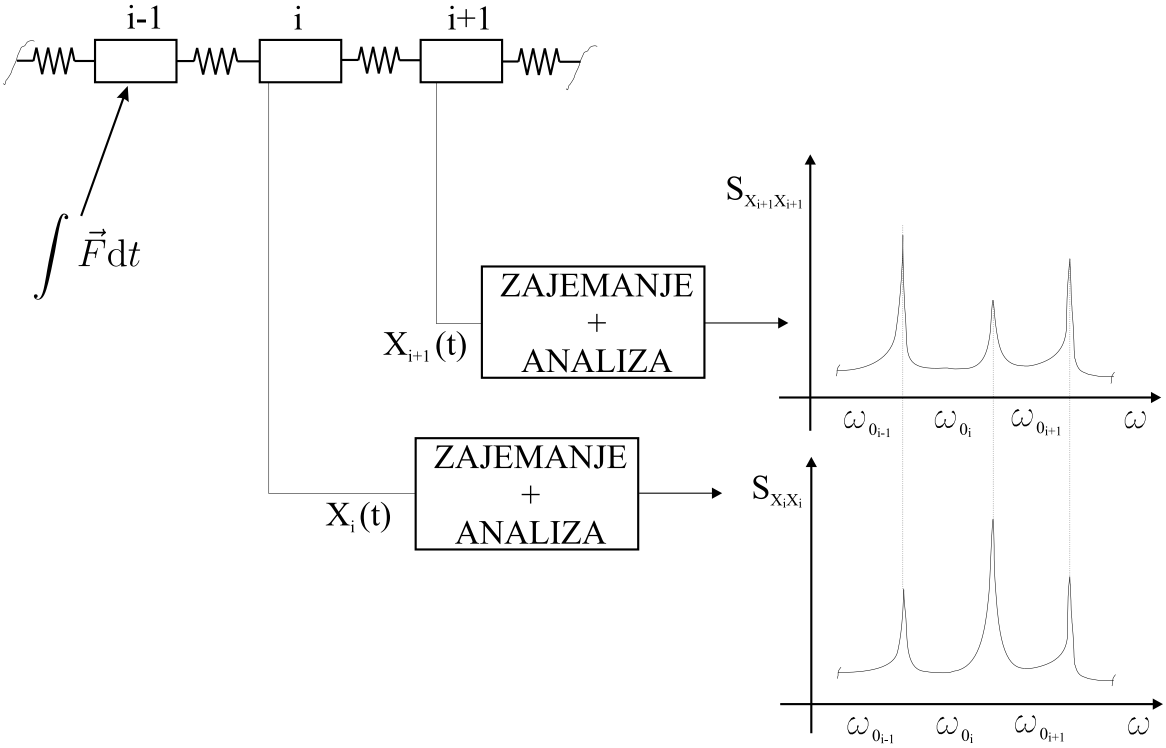
$$x(t) = \frac{F_0}{k\omega_0 t_0}\left[(1 - \cos(\omega_0 t_0))\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t_0 - \sin(\omega_0 t_0))\cos(\omega_0 t)\right] \tag{13}$$



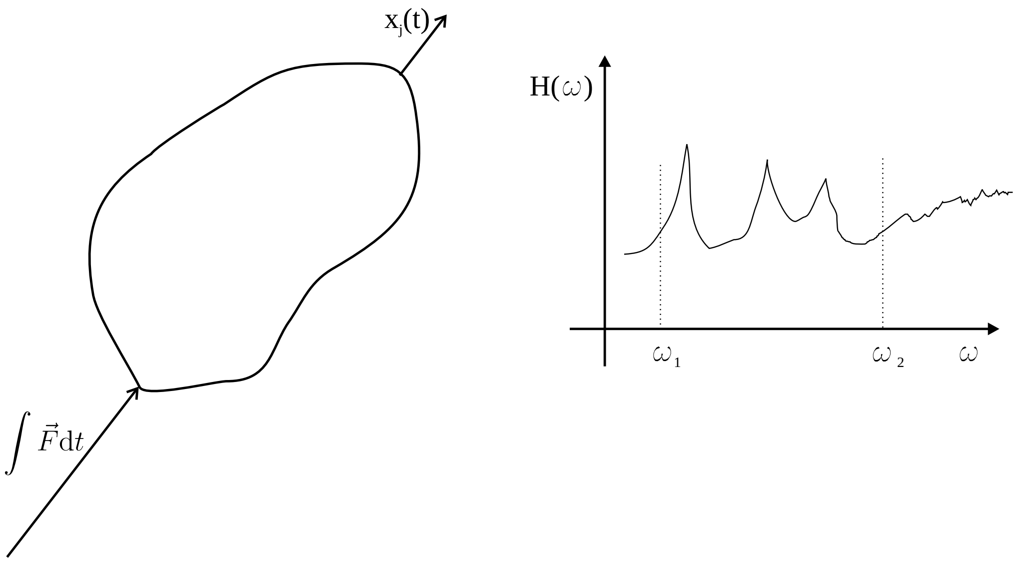
Slika 9: Odziv sistema prikazanega na sliki 7.

6 Uporaba udarne motnje

6.1 Diskretni sistemi



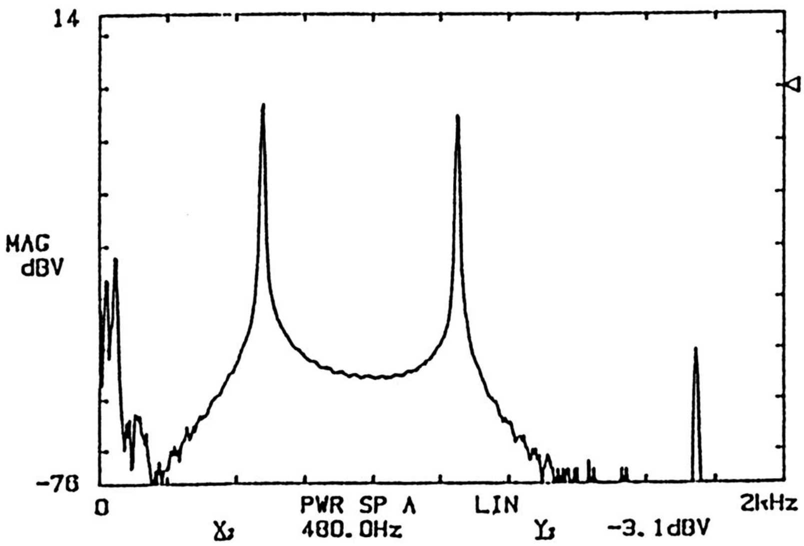
6.2 Zvezni sistem-eksperimentalna strukturna dinamika



7 Eksperimentalno preverjanje kvalitete modela za izračun upogibnih nihanj pri dinamiki rotorjev

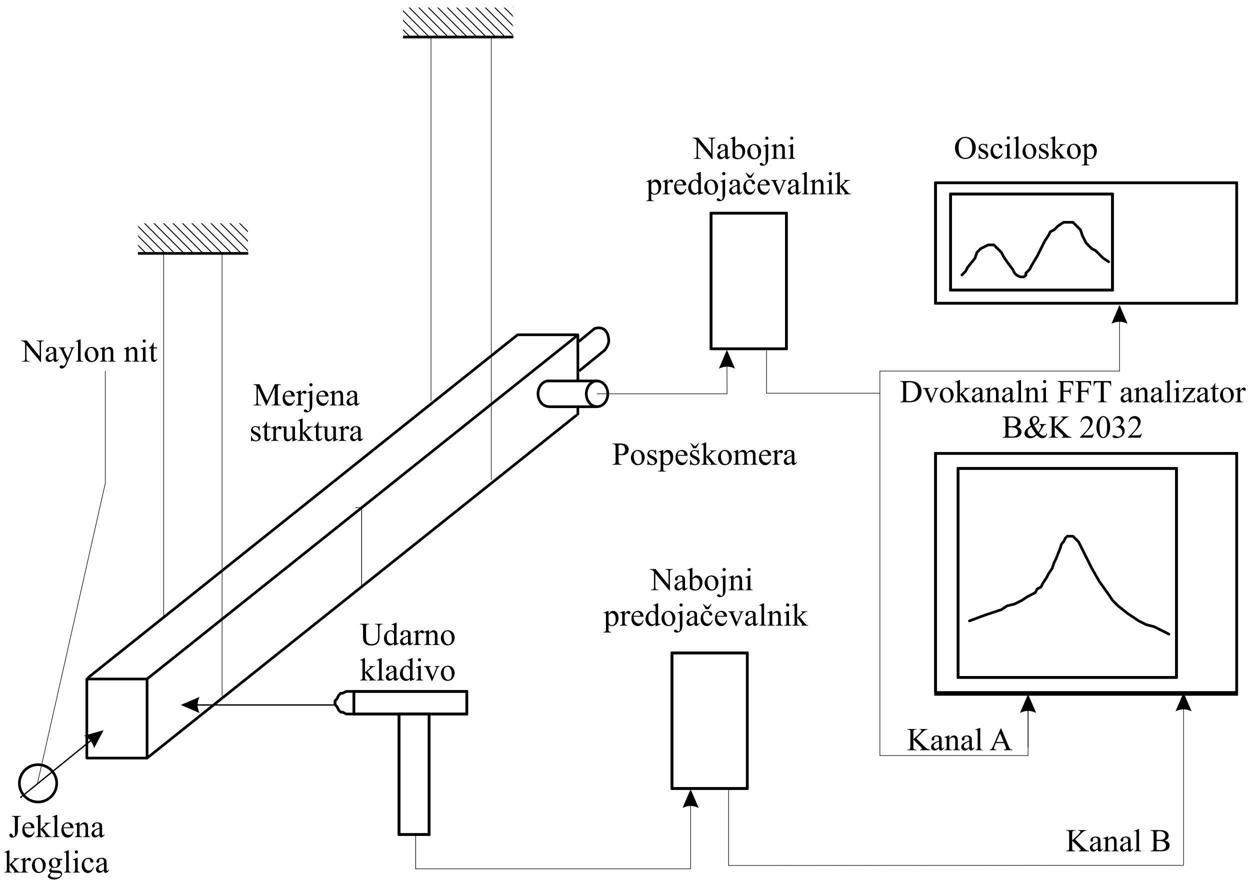
Slika 10: Diskretizacija gredi.

	f_{01} [Hz]	Δ [%]	f_{02} [Hz]	Δ [%]
Eksp. vrednost	480.0		1050.0	
MPM	465.7	2.98	1044.4	0.56

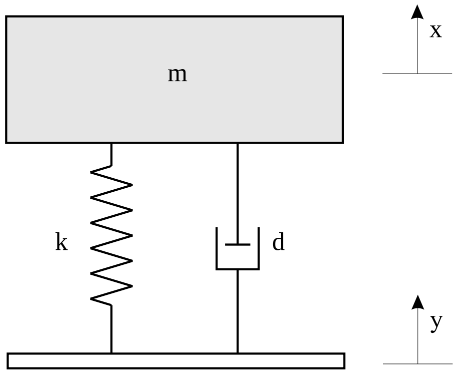


Slika 11: Diagram spektralne gostote.

8 Neporušno testiranje poškodovanih struktur



9 Odziv na vzbujanje podlage



Gibalna enačba:

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - d(\dot{x} - \dot{y}) \tag{14}$$

Če sedaj uvedemo novo spremenljivko $z = x - y$, lahko gibalno enačbo (14) zapišemo v naslednji obliki:

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{15}$$

Opazimo pa podobnost enačb (15) in (16):

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + kz = F \tag{16}$$

Za podkritično viskozno dušen sistem je impulzna prenosna funkcija:

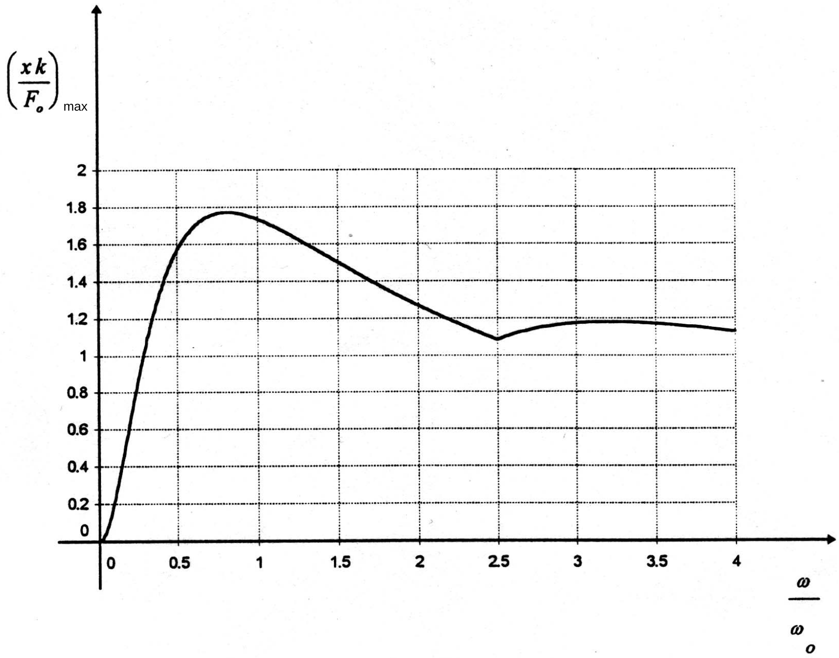
$$g(t) = \frac{1}{m\omega_{0d}} e^{-\delta\omega_0 t} \sin(\omega_{0d} t) \tag{17}$$

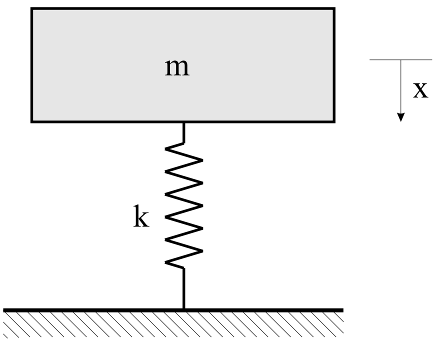
Rešitev gibalne enačbe 14 je:

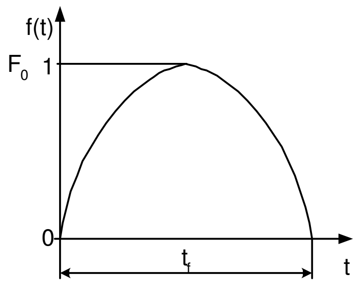
$$x(t) = \int_0^t f(t_1) g(t - t_1) \mathrm{d}t_1 \tag{18}$$

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_{0d}} \int_0^t \ddot{y}(t_1) e^{-\delta\omega_0 (t-t_1)} \sin(\omega_{0d}(t - t_1)) \mathrm{d}t_1 \tag{19}$$

10 Udarni spekter







$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = \frac{\pi}{t_f}$