

UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Gradivo za vaje

Statika in kinematika

Miha Kodrič
Miha Pogačar
Domen Ocepek

Ljubljana, 2022/2023

Osnovne informacije o predmetu

Domača stran predmeta: <http://www.ladisk.si/>

Stran za domače naloge: <https://sik.domace-naloge.si/>

Izvajalec:

- izr. prof. dr. Gregor Čepon
 - e-pošta: gregor.cepon@fs.uni-lj.si
 - kabinet: DS-P6
 - govorilne ure (online): petek 11:00-12:00

Asistenta:

- Tim Vrtač
 - e-pošta: tim.vrtac@fs.uni-lj.si
 - soba: DS-P5
 - govorilne ure: četrtek 12:00-13:30
- Jure Korbar
 - e-pošta: jure.korbar@fs.uni-lj.si
 - soba: DS-P5
 - govorilne ure: četrtek 12:00-13:30

Namestitev programa Wolfram Mathematica: Kliknite na povezavo in dosledno sledite navodilom.

Kazalo

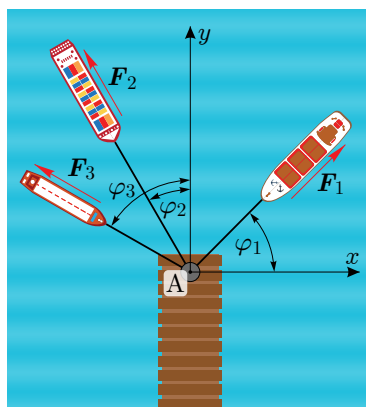
1	Statika masne točke	3
2	Statika togega telesa	5
3	Geometrijsko in masno središče	7
4	Paličja	10
5	Ravni nosilci	11
6	Lomljeni in ločni nosilci	12
7	Vrvi	13
8	Trenje	14
9	Kinematika masne točke	16
10	Kinematika togega telesa	18

1 Statika masne točke

Naloga 1.1

Tri ladje so z vrvmi privezane na pomol v točki A in ga obremenjujejo s silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ in $\mathbf{F}_3$, kot je prikazano na sliki 1.

- Po metodi relativnih kotov določite rezultanto sil, ki jih ladje povzročajo na pomol.
- Po metodi absolutnih kotov določite rezultanto sil, ki jih ladje povzročajo na pomol.
- Določite smerni vektor rezultante sil.
- Določite absolutne kote, ki jih rezultanta oklepa z osmi koordinatnega sistema.



Slika 1: Shema naloge

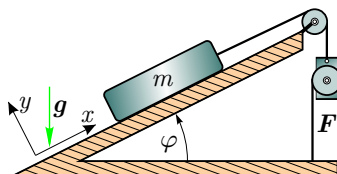
Spremenljivka	Vrednost
F_1	15 kN
F_2	20 kN
F_3	10 kN
φ_1	45°
φ_2	30°
φ_3	60°

Tabela 1: Podatki.

Naloga 1.2

Klado z maso m z uporabo škripca vlečete po klancu z naklonskim kotom φ , kot je prikazano na sliki 2. Trenje pri reševanju naloge zanemarite.

- Določite silo v vrvi, ki povezuje klado in viseči škripec v primeru, ko klada miruje.
- Izračunajte velikost vlečne sile $\mathbf{F}$, ki je potrebna, da klada po klancu potuje s konstantno hitrostjo.



Slika 2: Shema naloge

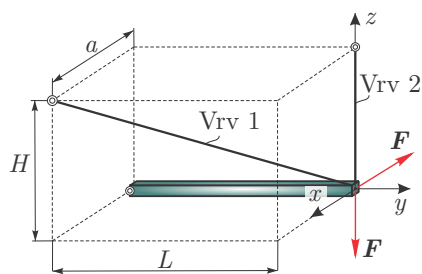
Spremenljivka	Vrednost
m	50 kg
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
φ	30°

Tabela 2: Podatki.

Naloga 1.3

Obravnavajte konstrukcijo, sestavljeno iz palice in dveh vrvi, ki je prikazana na sliki 3. Pri reševanju naloge predpostavite skupno prijemališče sil na desnem robu palice.

- a) Določite silo v vrveh.
- b) Določite notranjo osno silo v palici.



Slika 3: Shema naloge

Spremenljivka	Vrednost
a	1,5 m
H	1 m
L	2 m
F	500 N

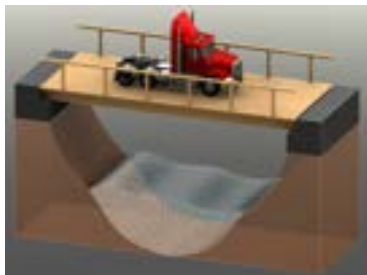
Tabela 3: Podatki.

2 Statika togega telesa

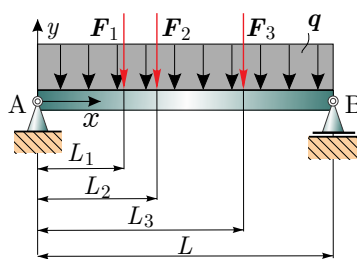
Naloga 2.1

Na mostu se je ustavil tovornjak. Svojo težo na most prenaša preko šestih koles, kar bomo zaradi poenostavitve v ravninski primer ponazorili s tremi točkovnimi silami F_1 , F_2 in F_3 , kot je prikazano na sliki 5. Lastno težo mosta modeliramo z zvezno obremenitvijo q .

- a) Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah A in B.



Slika 4: Shema naloge.



Slika 5: Fizikalni model.

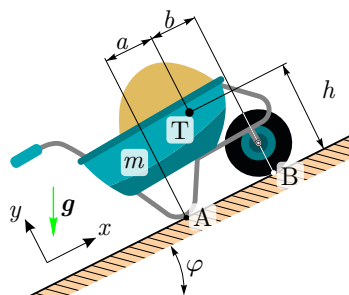
Spremenljivka	Vrednost
F_1	5 kN
F_2	8 kN
F_3	20 kN
q	10 kN/m
L	8 m
L_1	3 m
L_2	4 m
L_3	6 m

Tabela 4: Podatki.

Naloga 2.2

Samokolnico ste parkirali na klanec z naklonskim kotom φ , kot je prikazano na sliki 6. Skupna masa bremena in samokolnice znaša m , težišče pa je določeno s točko T.

- a) Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporni nogi (točka A) in kolesu samokolnice (točka B).
- b) Določite mejni kot φ , pri katerem se samokolnica prevrne.



Slika 6: Shema naloge

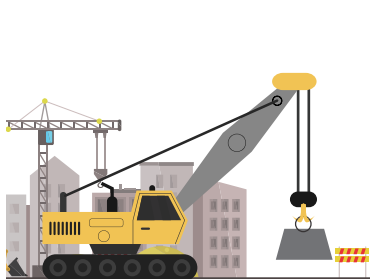
Spremenljivka	Vrednost
m	40 kg
g	9,81 m/s ²
φ	15°
a	0,4 m
b	0,3 m
h	0,5 m

Tabela 5: Podatki.

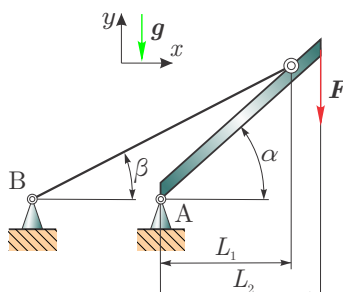
Naloga 2.3

Mirujoč žerjav na gradbišču na konstantni višini zadržuje breme (slika 7). Nagibna ročica je v podpori A vpeta na podvozje žerjava in preko vrvi povezana z podporo B. Breme na koncu nagibne ročice povzroča obremenitev s silo F . Lastna teža nagibne ročice je v primerjavi z bremenom zanemarljiva.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podpori A.
- Določite silo v vrvi in komponenti reakcijske sile v podpori B.



Slika 7: Shema naloge.



Slika 8: Fizikalni model.

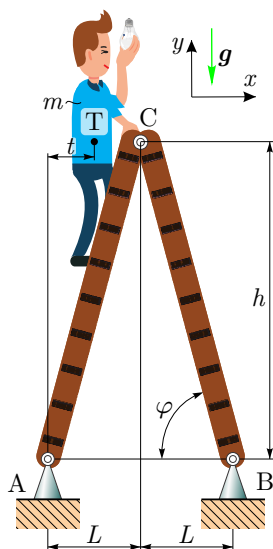
Spremenljivka	Vrednost
F	10 kN
g	9,81 m/s ²
L_1	2,6 m
L_2	3 m
α	45°
β	35°

Tabela 6: Podatki.

Naloga 2.4

Pri menjavi pregorele žarnice si pomagata z lestvijo, kot je prikazano na sliki 9.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah A in B in komponenti sile v členku C.



Slika 9: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
m	70 kg
g	9,81 m/s ²
h	2,5 m
t	0,3 m
φ	80°

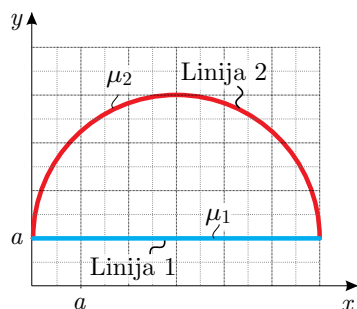
Tabela 7: Podatki.

3 Geometrijsko in masno središče

Naloga 3.1

Obravnavajte linijsko konstrukcijo, ki je prikazana na sliki 10. Določite:

- geometrijsko središče konstrukcije.
- masno središče konstrukcije.



Slika 10: Shema naloge.

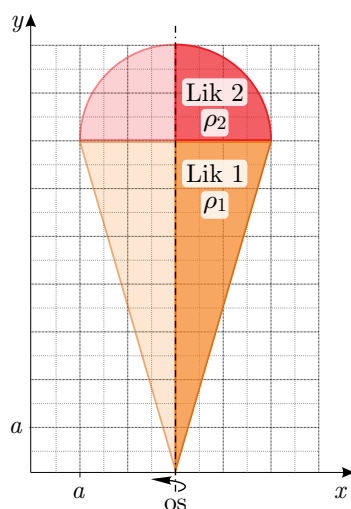
Spremenljivka	Vrednost
a	0,5 m
μ_1	1,2 kg/m
μ_2	0,8 kg/m

Tabela 8: Podatki.

Naloga 3.2

Med počitnikovanjem na morju ste se odpravili na sladoled. Med čakanjem v dolgi vrsti ste se odločili za analizo preprostega modela korneta s kepico sladoleda, ki je prikazan na sliki 11. Določite:

- geometrijsko središče likov 1 in 2.
- maso celotnega telesa, ki ga dobimo z rotacijo likov 1 in 2 okoli označene osi.



Slika 11: Shema naloge.

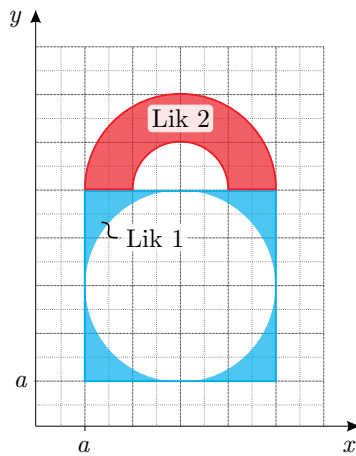
Spremenljivka	Vrednost
a	0,01 m
ρ_1	60 kg/m ³
ρ_2	990 kg/m ³

Tabela 9: Podatki.

Naloga 3.3

Obravnavajte sklop likov, ki je prikazan na sliki 12.

- a) Določite geometrijsko središče prikazanega sklopa likov.



Slika 12: Shema naloge.

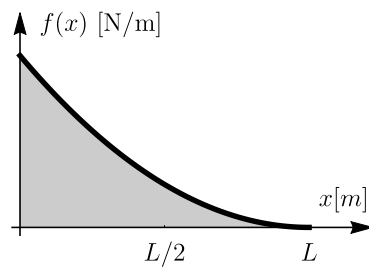
Spremenljivka	Vrednost
a	0,02 m

Tabela 10: Podatki.

Naloga 3.4

Krivulja, prikazana na sliki 13, je definirana s predpisom $f(x) = q_0 \left(\frac{x-L}{L} \right)^2$. Določite:

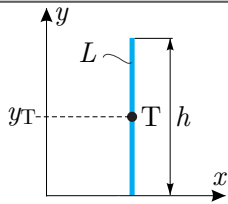
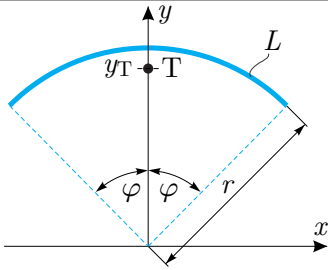
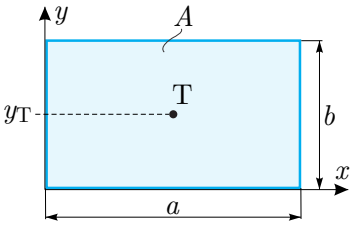
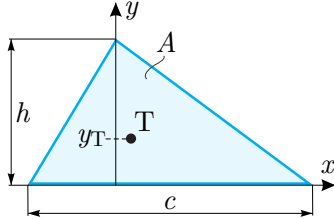
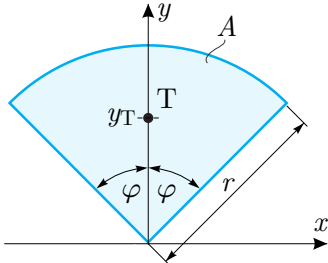
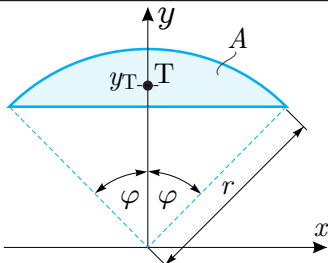
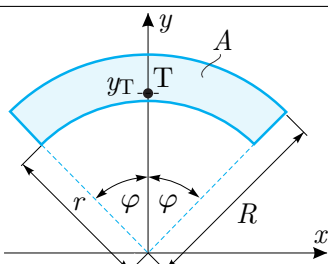
- a) površino in x -koordinato geometrijskega središča lika pod krivuljo.
 b) volumen telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika pod krivuljo okoli y -osi koordinatnega sistema.



Slika 13: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
L	2 m
q_0	100 N/m

Tabela 11: Podatki.

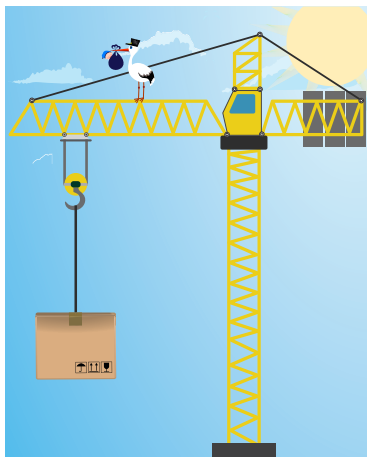
GEOMETRIJSKA SREDIŠČA LINIJ IN LIKOV			
linija	skica	s	y_T
daljica		h	$\frac{h}{2}$
krožni lok		$2r \widehat{\varphi}$	$\frac{r \sin(\varphi)}{\widehat{\varphi}}$
lik	skica	A	y_T
pravokotnik		$a b$	$\frac{b}{2}$
trikotnik		$\frac{c h}{2}$	$\frac{h}{3}$
krožni izsek		$r^2 \widehat{\varphi}$	$\frac{2}{3} r \frac{\sin \varphi}{\widehat{\varphi}}$
krožni odsek		$\frac{r^2}{2} (2 \widehat{\varphi} - \sin(2 \widehat{\varphi}))$	$\frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \varphi}{\widehat{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi}$
izsek kolobarja		$(R^2 - r^2) \widehat{\varphi}$	$\frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \varphi}{\widehat{\varphi}}$

4 Paličja

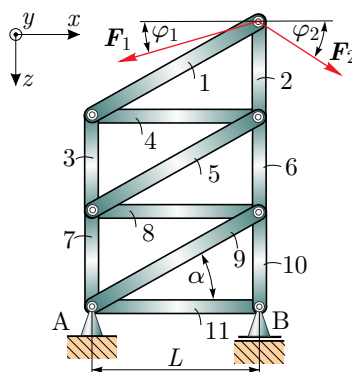
Naloga 4.1

Med učenjem za prvi kolokvij pri Statiki in kinematiki ste se ozrli skozi okno in zagledali žerjav, ki je prikazan na sliki 14. Ko ste predelali teoretične osnove metode členkov, ste se odločili za preračun konstrukcije nad kabino operaterja, katere fizikalni model je prikazan na sliki 15.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah A in B.
- Določite notranje osne sile v označenih palicah.



Slika 14: Shema naloge.



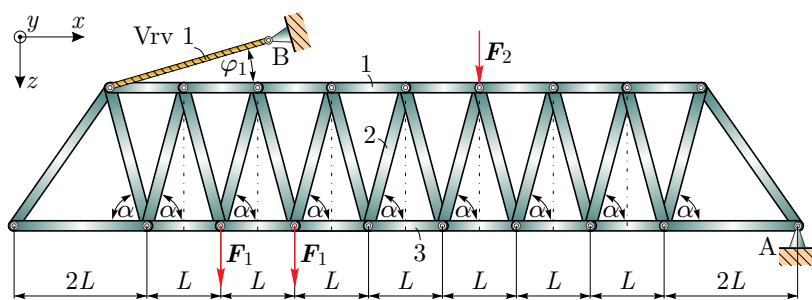
Slika 15: Fizikalni model.

Spremenljivka	Vrednost
F_1	5000 N
F_2	2000 N
L	1,5 m
α	30°
φ_1	15°
φ_2	30°

Tabela 12: Podatki.

Za vajo iz metode prereзов ste si izbrali del palične konstrukcije na levi strani kabine operaterja, katere fizikalni model je prikazan na sliki 16.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah A in B.
- Določite notranje osne sile v označenih palicah.



Slika 16: Fizikalni model.

Spremenljivka	Vrednost
F_1	5000 N
F_2	200 N
L	1,5 m
α	60°
φ_1	15°

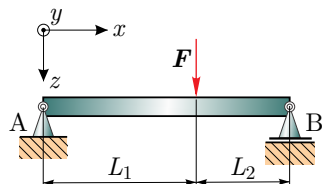
Tabela 13: Podatki.

5 Ravni nosilci

Naloga 5.1

Obravnavajte nosilec, ki je prikazan na sliki 17.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah.
- Določite potek notranjih veličin v nosilcu in jih grafično prikažite v obliki NTM diagrama.



Slika 17: Shema naloge.

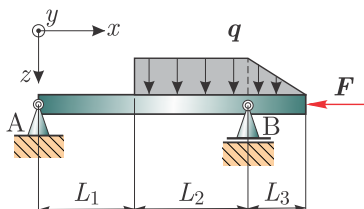
Spremenljivka	Vrednost
F	3000 N
L_1	2,0 m
L_2	1,0 m

Tabela 14: Podatki.

Naloga 5.2

Obravnavajte nosilec, ki je prikazan na sliki 18.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah.
- Določite potek notranjih veličin v nosilcu in jih grafično prikažite v obliki NTM diagrama.



Slika 18: Shema naloge.

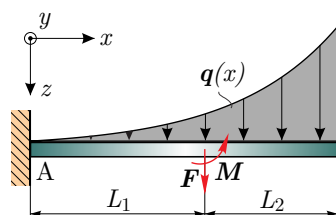
Spremenljivka	Vrednost
F	500 N
q	2000 N/m
L_1	1,0 m
L_2	1,4 m
L_3	0,9 m

Tabela 15: Podatki.

Naloga 5.3

Obravnavajte nosilec, ki je prikazan na sliki 19. Zvezna obremenitev na nosilcu je definirana z $q(x) = c_1 x^2$.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podpori A.
- Določite potek notranjih veličin v nosilcu in jih grafično prikažite v obliki NTM diagrama.



Slika 19: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
L_1	3,0 m
L_2	2,0 m
c_1	3 N/m ³
F	100 N
M	300 Nm

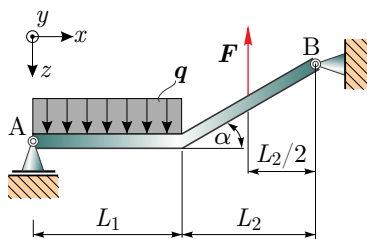
Tabela 16: Podatki.

6 Lomljeni in ločni nosilci

Naloga 6.1

Obravnavajte nosilec, ki je prikazan na sliki 20.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah.
- Določite potek notranjih veličin v nosilcu in jih grafično prikažite v obliki NTM diagrama.



Slika 20: Shema naloge.

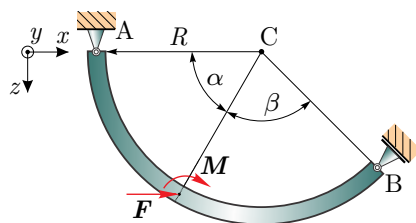
Spremenljivka	Vrednost
F	500 N
q	100 N/m
α	30°
L_1	2,0 m
L_2	3,0 m

Tabela 17: Podatki.

Naloga 6.2

Obravnavajte nosilec, ki je prikazan na sliki 21.

- Z ozirom na dani koordinatni sistem določite reakcije v podporah.
- Določite potek notranjih veličin v nosilcu in jih grafično prikažite v obliki NTM diagrama.



Slika 21: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
F	500 N
M	200 Nm
R	2,0 m
α	60°
β	75°

Tabela 18: Podatki.

7 Vrvi

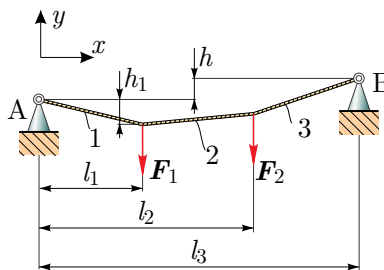
Naloga 7.1

Med počitnikovanjem na Bahamih se je vaše oko ustavilo na vrvi, napeti med dvema palmama. Na njej je turistka z Norveške sušila svoj moker klobuk in kopalke (slika 22). Strojniška žilica vam ne da miru, zato izmerite geometrijo in obremenitve ter obravnavate vrv, kot prikazano na sliki 23.

- Določite reakcijske sile v podporah A in B.
- Določite vrednosti notranje osne sile v posameznih odsekih vrvi.
- Določite pravo dolžino vrvi.



Slika 22: Shema naloge



Slika 23: Shema naloge

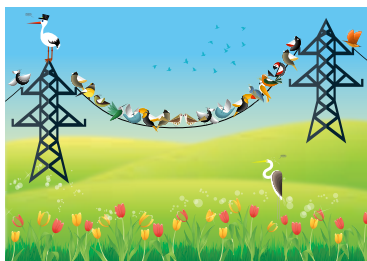
Spremenljivka	Vrednost
l_1	0,4 m
l_2	0,9 m
l_3	1,5 m
h	0,5 m
h_1	0,2 m
F_1	6 N
F_2	2 N

Tabela 19: Podatki.

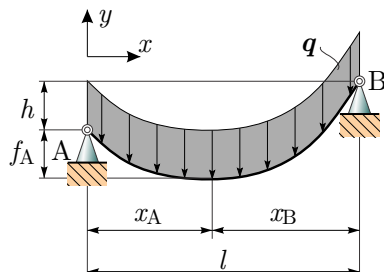
Naloga 7.2

Na daljnovodu so se zgodaj jeseni začele zbirati ptice selivke (slika 24). Razporejene so enakomerno po celotni dolžini električnega kabla (slika 25).

- Določite reakcijske sile v podporah A in B.
- Določite potek osne sile v vrvi ter vrednost in lokacijo maksimalne vrednosti osne sile.
- Določite pravo dolžino električnega kabla med dvema daljnovodoma.



Slika 24: Shema naloge



Slika 25: Shema naloge

Spremenljivka	Vrednost
l	20 m
h	3 m
f_A	2 m
q	80 N/m

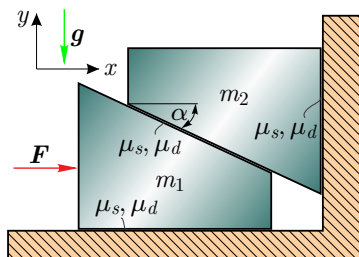
Tabela 20: Podatki.

8 Trenje

Naloga 8.1

Obravnavajte sistem zagozd, ki je prikazan na sliki 26. Določite:

- minimalno velikost sile $\mathbf{F}$, da bo sistem miroval.
- maksimalno velikost sile $\mathbf{F}$, pri kateri bo sistem miroval.
- velikost sile $\mathbf{F}$, da se bo zgornja zagozda navzgor pomikala s konstantno hitrostjo.



Slika 26: Shema naloge.

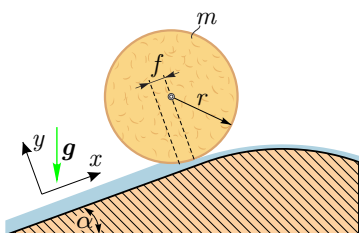
Spremenljivka	Vrednost
m_1	5 kg
m_2	10 kg
g	9,81 m/s ²
μ_s	0,2
μ_d	0,1
α	30°

Tabela 21: Podatki.

Naloga 8.2

S prijateljem ste po zasneženem klancu skušali balo sena zakotaliti do hleva, vendar vam to ni uspelo in se je bala ustavila na klancu, kot je prikazano na sliki 27.

- Določite silo trenja.
- Izračunajte koeficient kotalnega trenja.



Slika 27: Shema naloge.

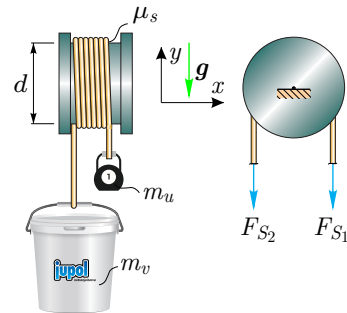
Spremenljivka	Vrednost
m	300 kg
g	9,81 m/s ²
r	0,6 m
α	10°

Tabela 22: Podatki.

Naloga 8.3

Pri pleskanju stanovanja ste zaradi prepogostega sklanjanja začutili bolečine v križu. Kot pravi inženir ste se domislili rešitve, da bi si vedro mase m_v dvignili na primernejšo višino. Na voljo ste imeli le vrv, utež z maso 1 kg, zato ste uporabili princip trenja med vrvjo in kolutom, kot je prikazano na sliki 28.

- a) Izračunajte, kolikšen mora biti objemni kot, da sistem miruje.



Slika 28: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
m_v	20 kg
m_u	1 kg
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
d	0,4 m
μ_s	0,1

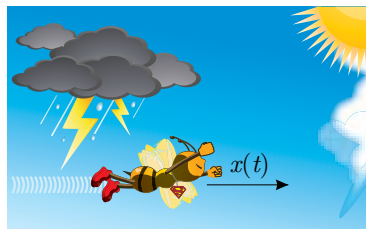
Tabela 23: Podatki.

9 Kinematika masne točke

Naloga 9.1

Iz varnega zavetja opazujete čebelo, ki s premočrtnim letenjem skuša ubežati nevihti. Zaradi močnega in neenakomernega vetra opazite zanimivo spreminjanje kinematičnih veličin.

- (a) Funkcijski predpis pomika je enak $x(t) = c_1 t^3 - c_2 t^2 + c_3 t$. Določite hitrost in pospešek čebele v času t_1 .
- (b) Funkcijski predpis pospeška je enak $\ddot{x}(t) = c_4 t + c_5 \cos(c_6 t)$. Določite hitrost in pomik čebele v času t_1 , če je bila začetna hitrost enaka v_0 , začetni pomik pa x_0 .



Slika 29: Shema naloge.

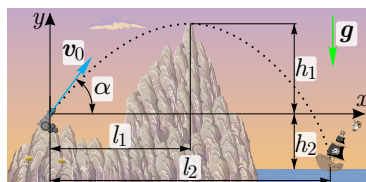
Spremenljivka	Vrednost
c_1	1 m/s^3
c_2	6 m/s^2
c_3	4 m/s
c_4	1 m/s^3
c_5	5 m/s^2
c_6	2 rad/s
x_0	0 m
v_0	1 m/s
t_1	6 s

Tabela 24: Podatki.

Naloga 9.2

Balistika je področje mehanike, ki preučuje gibanje izstreljenih teles. Mnogi znanstveniki in vojaki so se že predavnimi časi ukvarjali z trajektorijami gibanja topovskih izstrelkov. Obravnavajte primer prikazan na sliki 30.

- (a) Določite potrebno začetno hitrost izstrelka v_0 , da bo le ta še ravno preletel preko najvišje točke gore.
- (b) Določite razdaljo med topom in najvišjo točko gore l_1 .
- (c) Po kolikšnem času krogla doseže ladjo in koliko znaša prepotovana razdalja v x smeri l_2 ?
- (d) Koliko znaša absolutna velikost hitrosti, tik preden krogla zadane ladjo?



Slika 30: Shema naloge.

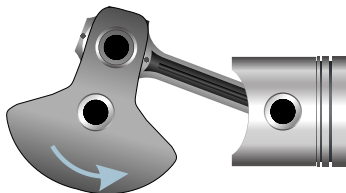
Spremenljivka	Vrednost
h_1	100 m
h_2	40 m
α	60°
g	$9,81 \text{ m/s}^2$

Tabela 25: Podatki.

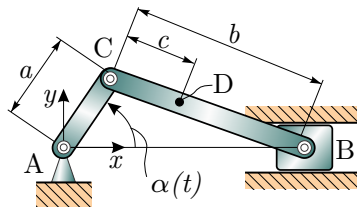
Naloga 9.3

Preučujete ročni mehanizem, ki translatorno gibanje bata pretvarja v rotacijsko gibanje ročične gredi v motorju (slika 31). Obravnavajte primer na sliki 32, kjer je rotacija ročične gredi opisana s predpisom $\alpha(t) = \omega t$.

- Določite funkcijski predpis pomika in hitrosti točke D v danem koordinatnem sistemu.
- Določite položaj in velikost hitrosti točke D v času t_1 .



Slika 31: Shema naloge.



Slika 32: Fizikalni model.

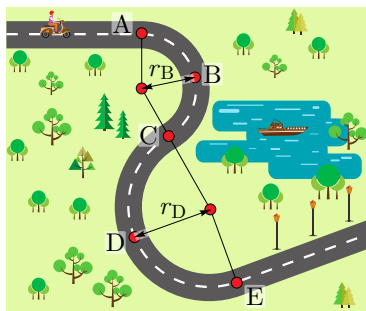
Spremenljivka	Vrednost
a	0,1 m
b	0,2 m
c	0,05 m
ω	12π rad/s
t_1	5 s

Tabela 26: Podatki.

Naloga 9.4

Opazujete motorista pri vožnji po cesti, kot je prikazano na sliki 33. Zaradi prihajajočega odseka z ovinki motorist ves čas zavira z enakomernim tangencialnim pojemkom. Znana je hitrost $v_{t,B}$ v točki B in hitrost $v_{t,D}$ v točki D. Dolžina odseka ceste med točkama B in D znaša L , ukrivljenost v točki D je enaka r_D , velikost pospeška v točki B pa je enaka a_B . Izračunajte:

- radij ukrivljenosti v točki B.
- pospešek v točki prevoja C.
- skupni pospešek v točki D.



Slika 33: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
$v_{t,B}$	30 m/s
$v_{t,D}$	12 m/s
$ a_B $	3 m/s^2
L	150 m
r_D	100 m

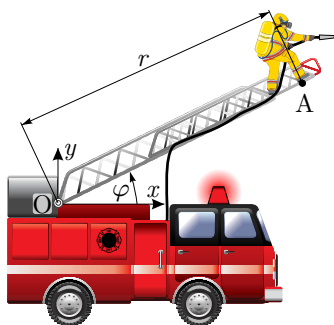
Tabela 27: Podatki.

10 Kinematika togega telesa

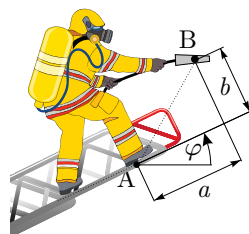
Naloga 10.1

Opazujete gasilca pri gašenju ognja. Dolžina raztegljive lestve se spreminja s predpisom $r(t) = c_1 + c_2 t$, njen zasuk okoli točke O pa se spreminja s predpisom $\varphi = c_3 t$. Predpostavite, da gasilec med dvigovanjem vzdržuje relativni položaj glede na lestev, kot je prikazano na sliki 35.

- V polarnem koordinatnem sistemu določite funkcije pomika, hitrosti in pospeška točke A in jih ovrednotite v času t_1 .
- V podanem kartezijevem koordinatnem sistemu izpeljite predpis hitrosti in pospeška gasilskega ročnika v točki B. Njuno velikost izračunajte za čas t_1 .



Slika 34: Shema naloge.



Slika 35: Gibanje gasilca.

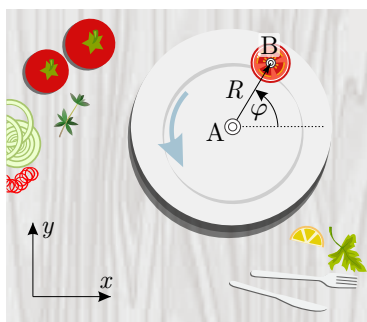
Spremenljivka	Vrednost
c_1	5 m
c_2	0.2 m/s
c_3	0.15 rad/s
a	0,3 m
b	$a\sqrt{3}$
t_1	5 s

Tabela 28: Podatki.

Naloga 10.2

Kuhar v prestižni restavraciji po pultu natakarju pošlje končan krožnik, kot je prikazano na sliki 36. Na krožniku je le en kolobar paradižnika (točka B), ki je nepomično prilepljen na premikajoči se krožnik. Krožnik drsi po mizi, pri tem pa se hkrati vrti okoli središča v točki A. Slednja se v globalnem koordinatnem sistemu pomika s predpisoma $x_A(t) = c_1 t^2$ in $y_A(t) = c_2 t^2$. Paradižnik se okoli središča krožnika vrti s predpisom $\varphi = c_3 t$.

- V danem kartezijevem koordinatnem izpeljite predpis pomika, hitrosti in pospeška točke B in njihove vrednosti ovrednotite v času t_1 .



Slika 36: Shema naloge.

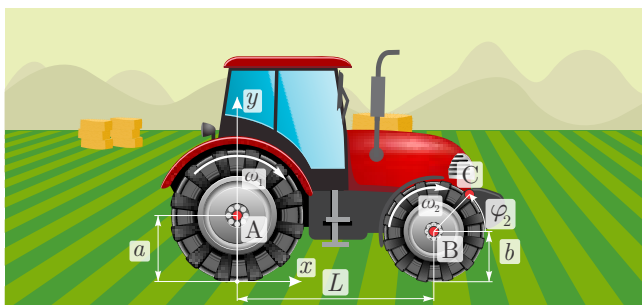
Spremenljivka	Vrednost
c_1	$0,5 \text{ m/s}^2$
c_2	$0,8 \text{ m/s}^2$
c_3	0,6 rad/s
R	0,2 m
t_1	2 s

Tabela 29: Podatki.

Naloga 10.3

Opazujete traktor pri delu na polju. Obe traktorski kolesi se vrtita brez podrsavanja, pri čemer je znana kotna hitrost zadnjega kolesa $\omega_1 = c_1 t + c_2$. V začetku opazovanja se točka A nahaja na lokaciji $x(t = 0) = 0$ m, velikost zasuka točke C pa takrat znaša $\varphi_2(t = 0) = \varphi_0$.

- Določite funkcijski predpis pomika točke A v x smeri, $x_A(t)$.
- Določite funkcijski predpis spreminjanja kota $\varphi_2(t)$.
- Določite funkcijski predpis pomika točke C.



Slika 37: Shema naloge.

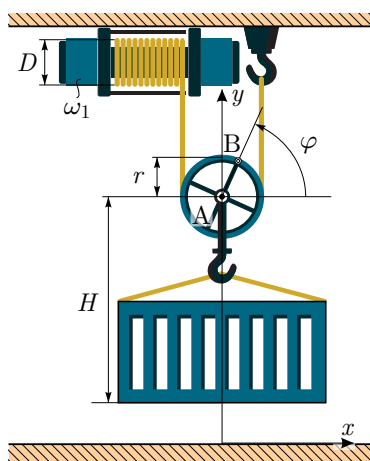
Spremenljivka	Vrednost
c_1	$0,4 \text{ rad/s}^2$
c_2	$0,5 \text{ rad/s}$
φ_0	$0,5 \text{ rad}$
L	$1,50 \text{ m}$
a	$0,8 \text{ m}$
b	$0,5 \text{ m}$

Tabela 30: Podatki.

Naloga 10.4

Opazujete dvigalo pri dviganju bremena, kar je prikazano na sliki 38. Navijalni bobn dviznega vitla, premera D , se vrti s krožno hitrostjo ω_1 . Vrv je napeljana preko škripca polmera r in je povezana na nepomični kavelj. Breme se je s tal dvignilo v času $t = 0$, pri čemer je zasuk škripca znašal $\varphi = \varphi_0$.

- V danem koordinatnem sistemu določite hitrost točke A.
- V danem koordinatnem sistemu določite predpis gibanja točke B in vrednosti koordinat ovrednotite v času t_1 .



Slika 38: Shema naloge.

Spremenljivka	Vrednost
D	$0,30 \text{ m}$
r	$0,25 \text{ m}$
H	$2,0 \text{ m}$
ω_1	5 rad/s
φ_0	0 rad
t_1	$1,5 \text{ s}$

Tabela 31: Podatki.