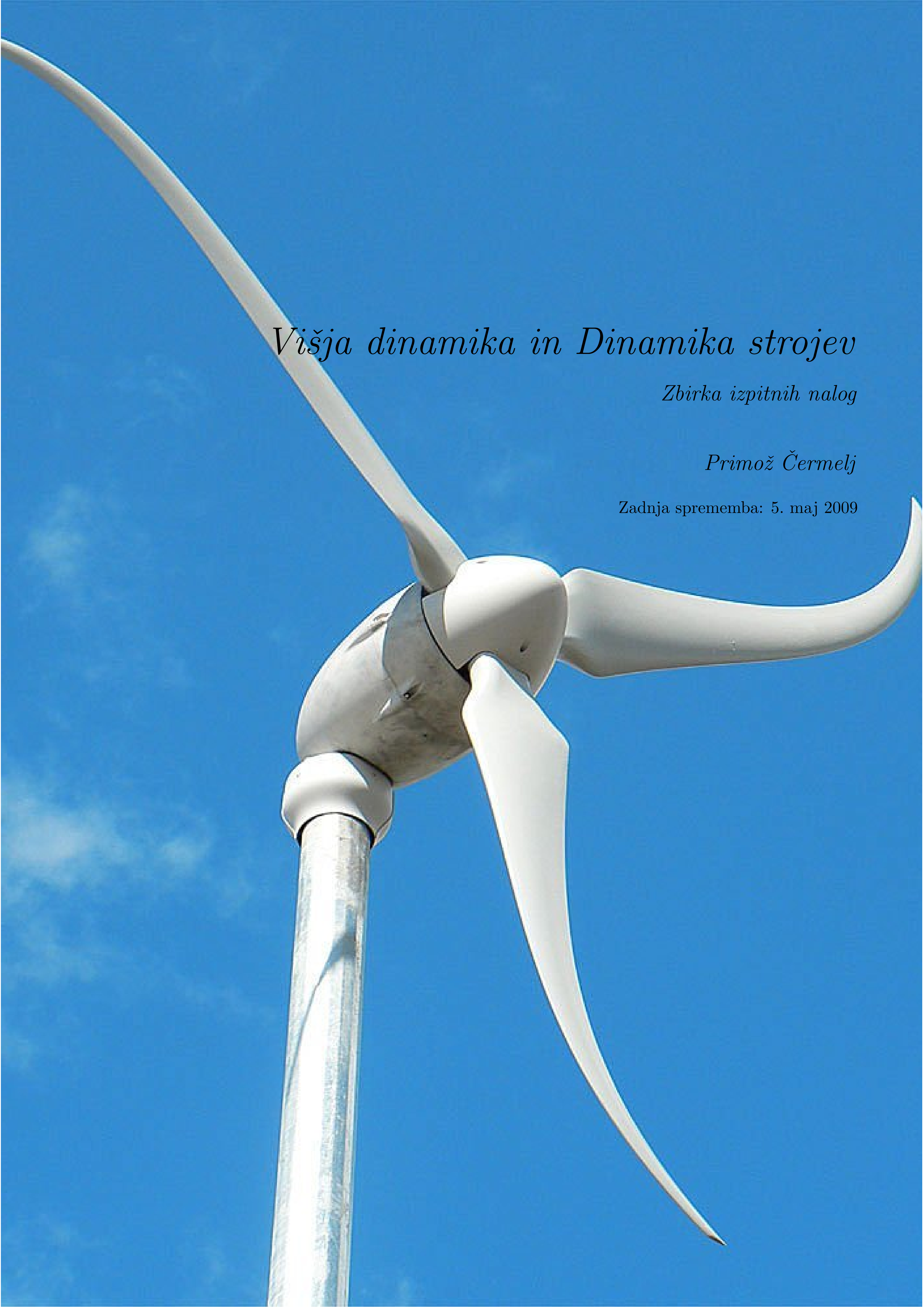
Višja dinamika in Dinamika strojev

Zbirka izpitnih nalog

Primož Čermelj

Zadnja sprememba: 5. maj 2009

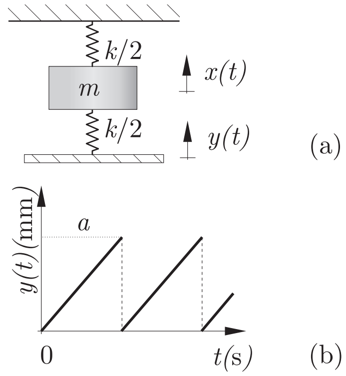


Kazalo

1 Periodično vzbujana nihanja - uporaba Fourierovih vrst

Naloga 1.1

Določi odziv sistema $x(t)$ na dano kinematiko podlage.



Podatki:

$m = 20\,\mathrm{kg}$
$k = 1800\,\mathrm{N/m}$
$a = 20\,\mathrm{mm}$
$T = 1\,\mathrm{s}$

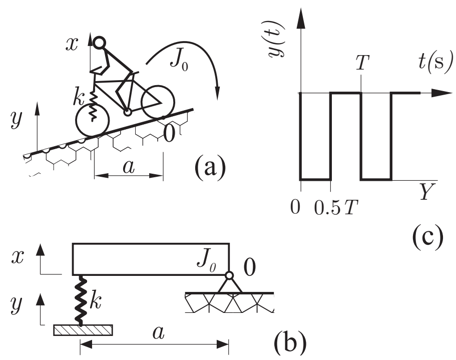
Rešitev:

$a_0 = a, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{a}{n\pi}$

$x(t) = \frac{a}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\sin(n\omega t)}{2n\pi\big(1-(n\omega/\omega_0)^2\big)}$

Naloga 1.2

Določite odziv krmila v navpični smeri, $x(t)$, zaradi *periodično se ponavljajočih* udarcev prvega kolesa v udarne jame, $y(t)$ - sl. (c). Predpostavite, da sta kolesi ves čas v dotiku s podlago, zanemarite vpliv udarjanja zadnjega kolesa v udarne jame, zanemarite vplive premika kolesarja s kolesom v smeri vzporedni s klancem ter upoštevajte dani masni vztrajnostni moment kolesarja in kolesa glede na točko 0, J_0 - upoštevajte model s sl. (b).



Podatki:

a, T, k, J_0, Y

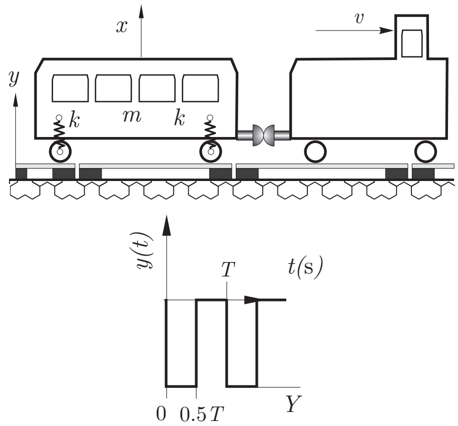
Rešitev:

$a_0 = kY, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2kY}{(2n-1)\pi}$

$x(t) = \frac{Y}{2} + \frac{2Y\omega_0^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\omega t)}{(2n-1)[\omega_0^2-\omega^2(2n-1)^2]}$

Naloga 1.3

Obe osi vagona v enakomernih časovnih intervalih udarjata v utor spoja tračnic, kar ponazorimo z $y(t)$. Če vpliv gibanja vlaka v horizontalni smeri zanemarimo, prav tako zanemarimo rotacijsko gibanje vagona, potem določite odziv vagona v navpični smeri, $x(t)$. Vagon modelirajte kot sistem z eno prostostno stopnjo, $x(t)$, in ustrezno nadomestno togostjo. Vagon ima maso m, vsaka od osi pa je na vagon pripeta z elementom togosti k.



Podatki:

k, m, T, Y

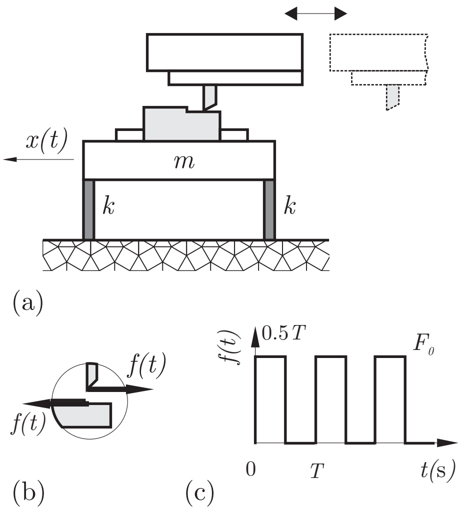
Rešitev:

$a_0 = 2kY, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4kY}{(2n-1)\pi}$

$x(t) = \frac{Y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Y\sin((2n-1)\omega t)}{(2n-1)\pi\big[1-(2n-1)^2/\omega_0^2\big]}$

Naloga 1.4

Pri pehanju (poseben postopek odrezavanja), smo izmerili silo $f(t)$ na nož v horizontalni smeri, le-ta pa se periodično ponavlja (glej sliko). Obdelovanec je fiksno vpet v mizo stroja, miza pa je vpeta na podajno podnožje. Zanima nas, kako sila $f(t)$ vpliva na nihanje sistema miza-obdelovanec. Določite odziv mize, skupaj z obdelovancem, v horizontalni smeri $x(t)$, če omenjeni sistem modeliramo kot sistem z eno prostostno stopnjo. Podajno podnožje poenostavljeno predstavimo v obliki dveh vzmeti, vsaka predstavlja togost k v smeri x. Skupna masa mize in obdelovanca je enaka m.



Podatki: k, m, T, F_0

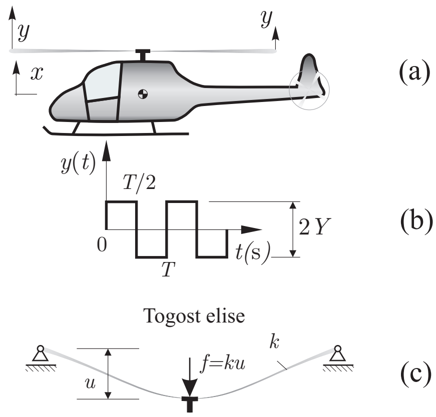
Rešitev:

$a_0 = F_0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2F_0}{(2n-1)\pi}$

$x(t) = \frac{F_0}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_0}{(2n-1)\pi\left(2k - m(2n-1)^2\omega^2\right)} \sin((2n-1)\omega t)$

Naloga 1.5

Zaradi turbulence je helikopter med letom izpostavljen *periodično se ponavljajočim* sunkom. Sunki na obeh koncih elise, pomiki $y(t)$, so izmerjeni kot jih prikazuje graf na sl. (b). Če helikopter modeliramo kot sistem z eno prostostno stopnjo, kjer eliso predstavimo z nadomestno togostjo k (sl. (c)), ostali del helikopterja pa kot masno točko mase m, potem določite odziv kabine helikopterja, $x(t)$, v navpični smeri. Vpliv gibanja helikopterja in vrtenje elise zanemarimo.



Podatki: k, m, T, Y

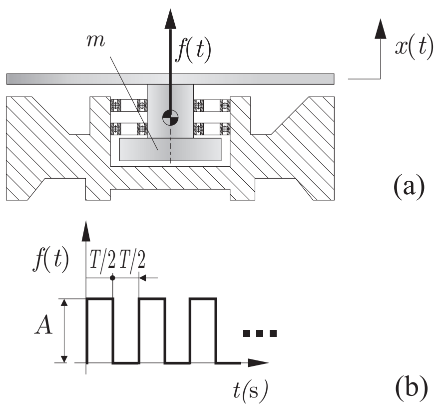
Rešitev:

$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4kY}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$

$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4kY \sin((2n-1)\omega t)}{(2n-1)\pi[k - m\omega^2(2n-1)^2]}$

Naloga 1.6

Zaradi nehomogenosti vrtečega se diska s sl. (a), nanj ***periodično*** deluje centrifugalna sila $f(t)$, ki je prikazana na sl. (b). Če oba ležaja nadomestimo z eno samo linearno vzmetjo togosti k, celotni vrteči se del pa predpostavimo v obliki masne točke z maso m, potem določite odziv diska v navpični smeri, $x(t)$, zaradi delovanja sile $f(t)$. Ohišje diska miruje.



Podatki: k, m, T, A

Rešitev:

$x(t) = \frac{A}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A \sin((2n-1)\omega t)}{(2n-1)\pi\left(k - m(2n-1)^2\omega^2\right)}$

Naloga 1.7

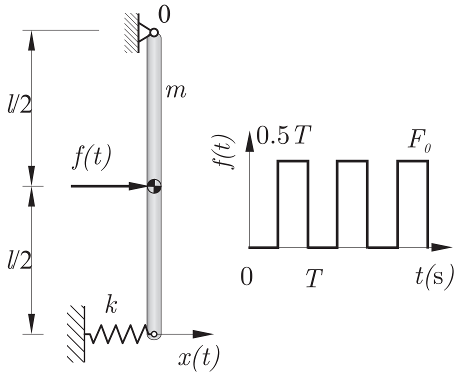
Določite odziv spodnjega konca palice, $x(t)$, na dano, periodično vzbujevalno silo $f(t)$. Maksimalna sila je F_0, masni vztrajnostni moment palice okrog vrtišča 0 pa je enak $\frac{1}{3}ml^2$. Upoštevajte majhne zasuke in pomike. Upoštevati morate tudi silo teže.

Podatki:

m, k, F_0, T, l

Rešitev:

$$x(t) = \frac{F_0 l}{2mg+4kl} - \frac{4F_0 l}{\pi(2mg+4kl)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\omega t)}{(2n-1)\left(1-((2n-1)\omega/\omega_0)^2\right)}$$



Naloga 1.8

Določite odziv jambora jadrnice, $\varphi(t)$, kot posledica periodičnega gibanja trupa jadrnice $\phi(t)$. Celotna masa jambora in jader je enaka m, rotacijska togost vpetja *jambora v trup* je k ($M = k\varphi$), višina jambora je enaka h. Vzdolžno gibanje jadrnice zanemarite, upoštevajte majhne zasuke, trup jadrnice pa obravnavajte kot togo telo.

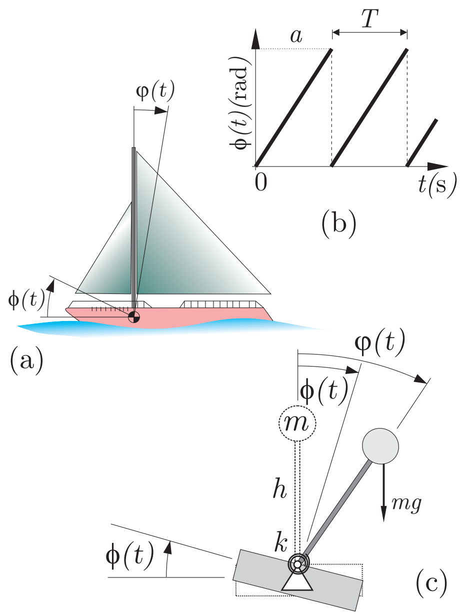
Podatki:

m, k, $\phi(t)$, a, T, h

Rešitev:

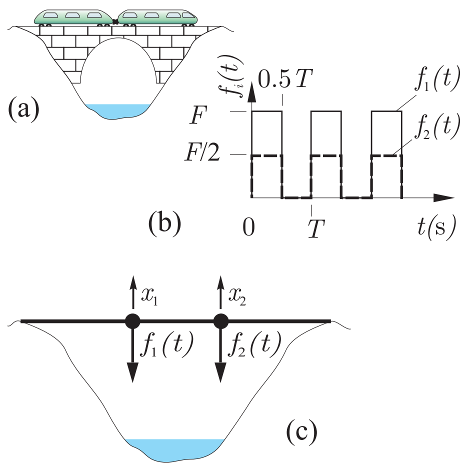
$$\varphi(t) = \frac{ak}{2(k-mgh)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\sin(n\omega t)}{\pi(k-mgh)\left[1-\left(\frac{n\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k-mgh}{mh^2}}$$



Naloga 1.9

Pri vožnji hitrega vlaka *Thalys* čez most, sl. (a), pride zaradi stika med tračnicami do periodičnega udarjanja koles vlaka in posledično, do periodičnega vzbujanja mostu. Če predpostavimo enostaven *model sistema (most in vlak)* s sl. (c), za katerega sta znani tako togostna in masna matrika kot tudi modalne lastnosti, potem določite ustaljeni odziv sistema $\boldsymbol{x} = \{x_1 \quad x_2\}^T$ preko uporabe modalnih koordinat. Periodično vzbujanje sistema je oblike $f(t) = \{f_1(t)\ f_2(t)\}^T$, sl (c).



Podatki:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

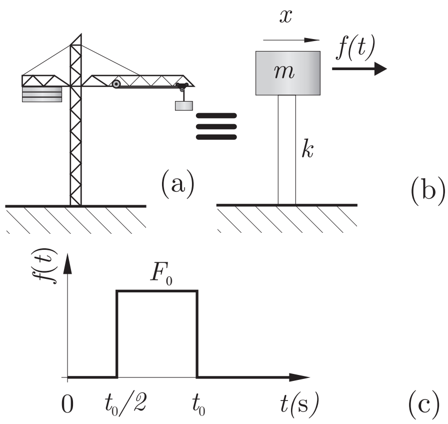
Rešitev:

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 \end{Bmatrix}, \quad \eta_i = \frac{F_i}{2k_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_i \sin[(2n-1)\omega t]}{\pi(2n-1)\left[\bar{k}_i - (2n-1)\bar{m}_i\omega^2\right]}, \quad F_1 = 3/2F,\ F_2 = 1/2F$$

2 Udarna motnja - Duhamelov integral

Naloga 2.1

Ob času $t_0/2$ žerjavist vklopi navijalni boben žerjava, le-ta pa se nato po času $t_0/2$ ustavi zaradi napake. Če upoštevamo poenostavljeni model žerjava s sl. b) in predpostavljeni sunek obremenitve na žerjav zaradi vztrajnostnih sil bremena, potem določite odziv žerjava $x(t)$ za poljubni čas $t > 0$.



Podatki:

$$m,\ k,\ F_0,\ t_0,\ f(t) = \begin{cases} F_0; & t_0/2 \le t \le t_0 \\ 0; & \text{drugje} \end{cases}$$

Rešitev:

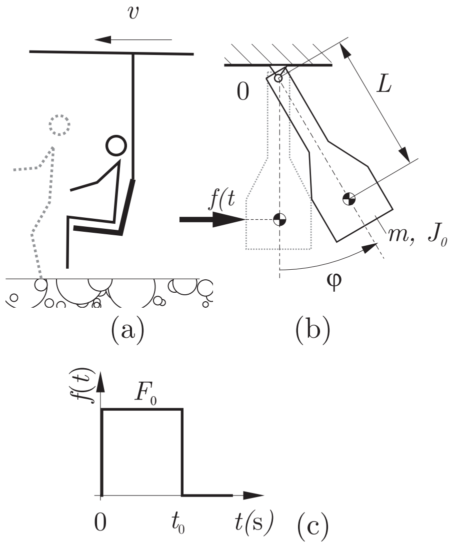
$x(t) = 0; \quad 0 \le t < t_0/2$

$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \cos\left[\omega_0(t - t_0/2)\right]\right]; \quad t_0/2 \le t \le t_0$

$x(t) = \frac{F_0}{k}\left[\cos\left[\omega_0(t - t_0)\right] - \cos\left[\omega_0(t - t_0/2)\right]\right]; \quad t > t_0$

Naloga 2.2

Ko se smučar usede na sedež enosedežnice, le-ta zaniha skupaj s sedežem. Vaša naloga je, da določite izraz za odziv smučarja s sedežem (skupna masa m) za čas $t > t_0$ ($\varphi(t) = ?$). Pri tem zanemarite vpliv gibanja sedeža v na nihanje, za impulz sile, ki ga povzroči smučar na sistem smučar-sedež, pa upoštevajte izraz $F_0 = \beta v m$ in sliko (c). Predpostavimo, da celotni sistem pred impulzom miruje in za reševanje upoštevamo nadomestni model s slike (b), ki vključuje nadomestni masni vztrajnostni moment sedeža in smučarja J_0 okrog točke vrtišča kot tudi nadomestno, skupno maso m.

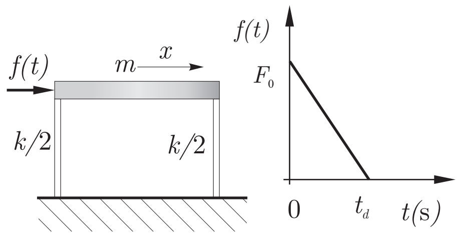


Podatki: $L,\ m,\ J_0,\ \beta,\ v,\ t_0,$

Rešitev: $\varphi(t) = \frac{\beta v}{g}\left[\cos(\omega_0(t-t_0)) - \cos(\omega_0 t)\right]; \quad t \geq t_0$

Naloga 2.3

Okvir na sliki modeliramo kot nedušen sistem z eno prostostno stopnjo. Določite odziv okvirja za čas $t \leq t_d$, če nanj deluje *sunek* sile trikotne oblike. *Namig*: pravilo integriranja "po delih": $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

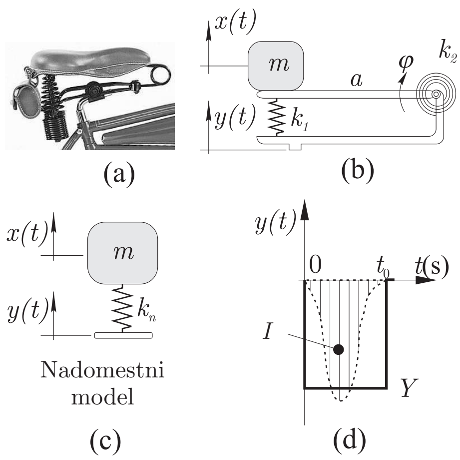


Podatki: $m,\ k,\ F_0,\ t_d$

Rešitev: $x(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \cos(\omega_0 t) - \frac{t}{t_d} + \frac{1}{t_d\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]$

Naloga 2.4

Nosilec sedeža legendarnega kolesa *1919 Indian Bicycle*, sl. (a), katerega model je prikazan na sl. (b) (masa m predstavlja kolesarja), v nekem trenutku med vožnjo utrpi sunek kot je to prikazano na sl. (d). Določite odziv nadomestnega modela s sl. (c), za katerega morate še prej določiti nadomestno togost k_n. Namesto dejanskega pomika $y(t)$, (površina pod krivuljo $y(t)$ je enaka I) le-tega predstavite v poenostavljeni obliki kot koračno funkcijo (debela polna črta na sl. (d)) višine Y in širine t_0 in enakim impulzom sile, I.



Podatki:

$a,\ k,\ I$

$k_1 = k$

$k_2 = a^2 k$

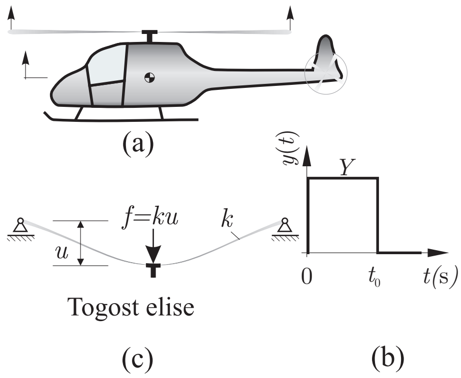
Rešitev:

$k_n = 2k, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{I}{t_0}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0(t-t_0))\right]; & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{I}{t_0}\left[\cos(\omega_0 t) - 1\right]; & t > t_0 \end{cases}$$

Naloga 2.5

Helikopter med letom, zaradi zračnih lukenj, v nekem trenutku doživi enkratni sunek v navpični smeri. Če je izmerjena amplituda sunka vetra na koncih enaka Y, oblika sunka $y(t)$ pa je prikazana na sliki (b), potem določite odziv kabine helikopterja za čas $t > 0$. Sistem modelirajte kot sistem z eno prostostno stopnjo, kjer eliso, skupaj z vretenom, predstavite v obliki nadomestne vzmeti togosti k s sl. (c), kabino pa kot masno točko mase m. Vpliv gibanja helikopterja in vrtenja elise zanemarite



Podatki:

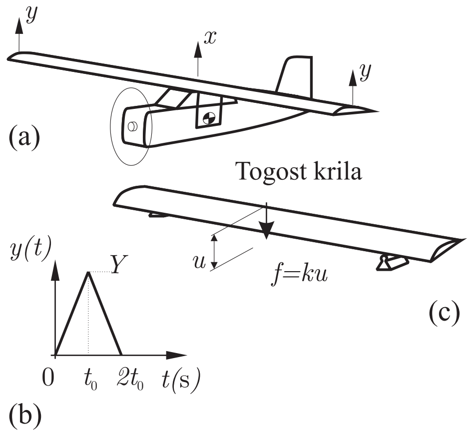
Y, t_0

Rešitev:

$x(t) = Y\left[\cos(\omega_0(t-t_0)) - \cos(\omega_0 t)\right]$

Naloga 2.6

Letalo med letom zaradi zračnih lukenj doleti enkratni sunek vetra v navpični smeri, ki traja do $2t_0$ – predpostavimo da sunek neposredno deluje le na obeh koncih krila. Če je največji izmerjen odmik na obeh koncih krila (hkrati) enak Y, oblika sunka $y(t)$ pa je prikazana na sliki (b), potem določite odziv trupa letala, $x(t)$, za čas $t > 2t_0$. Letalo modelirajte kot sistem z eno prostostno stopnjo, kjer krilo predstavite v obliki nadomestne vzmeti togosti k (glej sl. (c)), trup pa kot masno točko mase m. Vpliv gibanja letala zanemarite.



Podatki:

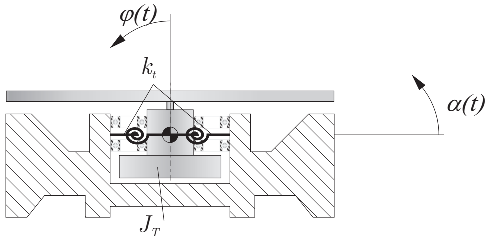
m, k, Y, t_0

Rešitev:

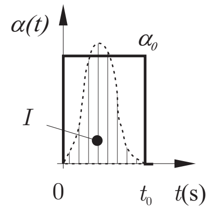
$$x(t) = \frac{Y}{m\omega_0 t_0}\left[\frac{t_0}{\omega_0}\cos(\omega_0(t-t_0)) + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\sin(\omega_0(t-t_0)) - \sin(\omega_0 t)\right)\right] + \frac{2Y}{m\omega_0^2}\left[\cos(\omega_0(t-2t_0)) - \cos(\omega_0(t-t_0))\right] -$$
$$- \frac{Y}{m\omega_0 t_0}\left[\frac{t_0}{\omega_0}\left(2\cos(\omega_0(t-2t_0)) - \cos(\omega_0(t-t_0))\right) + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\sin(\omega_0(t-2t_0)) - \sin(\omega_0(t-t_0))\right)\right]$$

Naloga 2.7

Na sliki je prikazan trdi disk, sestavljen iz togega, osrednjega vrtečega se dela masnega vztrajnostnega momenta okoli težišča, J_T, ter togega ohišja. Ohišje in osrednji del sta povezana preko ležajev, ki jih modeliramo kot dve torzijski vzmeti, k_t. Ohišje utrpi nenadni sunek v obliki *zasuka* $\alpha(t)$. Vaša naloga je, da namesto dejanskega zasuka $\alpha(t)$, (površina pod krivuljo $\alpha(t)$ je enaka I) le-tega predstavite v poenostavljeni obliki kot koračno funkcijo (debela polna črta na sl. b)) višine α_0 in širine t_0. Na podlagi poenostavljenega zasuka potem določite odziv osrednjega dela diska, $\varphi(t)$, za čas $t \leq t_0$.



(a)



(b)

Podatki:

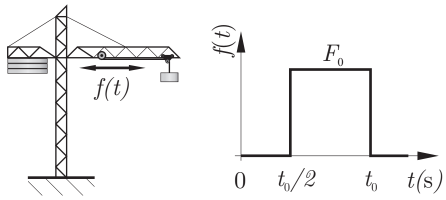
J_T, k_t, t_0, I

Rešitev:

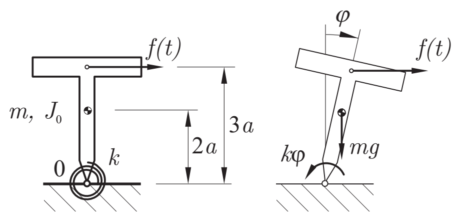
$\varphi(t) = \frac{I}{t_0}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right], \quad t \leq t_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k_t}{J_T}}$

Naloga 2.8

Določite odziv žerjava, $\varphi(t)$, kot posledica *udarne motnje* $f(t)$, ki deluje v horizontalni smeri na žerjav zaradi kombinacije vetra, nihanja bremena ipd. (glej skice). Model žerjava (sl. a in b) ima masni vztrajnostni moment okrog vrtišča 0 enak J_0, maso m, togost celotnega žerjava pa predstavimo v obliki *torzijske vzmeti* k. Upoštevajte majhne zasuke. Odziv določite za pogoj $1/2t_0 \leq t \leq t_0$.



(a) (b)



(c)

Podatki:

J_0, m, a, k, F_0, t_0

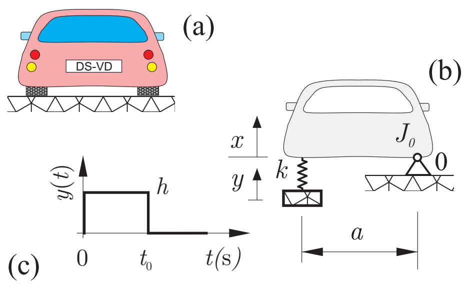
Rešitev:

$\varphi(t) = \frac{3aF_0}{k-2amg}\left[1 - \cos\left[\omega_0(t - t_0/2)\right]\right]$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k-2amg}{J_0}}$

Naloga 2.9

Vožnjo avtomobila s sl. (a) modeliramo kot gibanje togega telesa v ravnini (upoštevamo samo eno os oz. dve kolesi). Med vožnjo v nekem trenutku leva stran avtomobila zapelje na grbino, ki je določena kot pomik podlage $y(t)$, sl. (c). Ta, nenadni impulz, se preko leve gume, katere togost je enaka k, prenese na avtomobil in povzroči odziv leve strani avtomobila $x(t)$. Upoštevajte model s sl. (b) in določite odziv leve strani avtomobila, $x(t)$, v času vožnje avtomobila čez oviro ($0 \leq t \leq t_0$). Nadalje določite tudi, kakšna je lahko največja višina grbine, h_{max}, da največji odziv $x(t)$ ne bo večji od x_{max} (zopet v okviru $0 \leq t \leq t_0$). Masni vztrajnostni moment avtomobila okrog točke 0 je J_0.



Podatki:

a, t_0, J_0, h, x_{max}

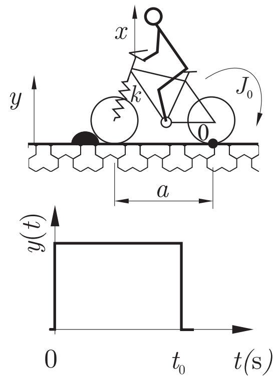
Rešitev:

$x(t) = h\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]$

$h_{max} = \frac{x_{max}}{2}$

Naloga 2.10

Kolesar s konstantno hitrostjo zapelje čez oviro na cesti. Pri tem se vzmeteno prvo kolo (prva os) sunkovito premakne v navpični smeri kot to poenostavljeno kaže graf $y(t)$. Določite odziv krmila v navpični smeri, $x(t)$, za čas $t > t_0$. Predpostavite, da sta kolesi ves čas v dotiku s podlago, zanemarite vplive premika kolesarja v vodoravni smeri, zanemarite nagib prednjega vzmetenja (vzmet predpostavimo navpično) in upoštevajte dani masni vztrajnostni moment kolesarja s kolesom okrog 0, J_0. Preden kolesar naleti na oviro, je sistem kolo-kolesar v ravnovesni legi. *Namig*: pazite na ustrezne enote nehomogenega dela diferencialne enačbe (N ali Nm) in od tega odvisne impulzne prenosne funkcije $g(t)$.



Podatki:

a, t_0, k, J_0, Y_0

$$y(t) = \begin{cases} Y_0; & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0; & \text{drugje} \end{cases}$$

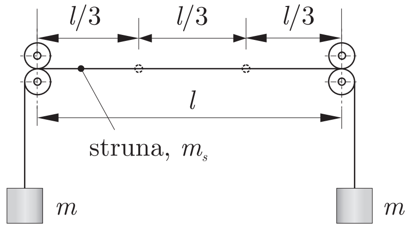
Rešitev:

$x(t) = Y_0\left[\cos\left[\omega_0(t - t_0)\right] - \cos(\omega_0 t)\right]$

3 Sistemi z več prostostnimi stopnjami

Naloga 3.1

Določite lastne frekvence strune, vpete med dvema kolutoma s pomočjo dveh uteži mase m (glej sliko). Izračun izvršite z diskretizacijo mase strune na 2 masni točki. Vertikalne pomike uteži zanemarite.



Podatki:

$m_s = 1\,\mathrm{kg}$
$m = 100\,\mathrm{kg}$
$l = 10\,\mathrm{m}$

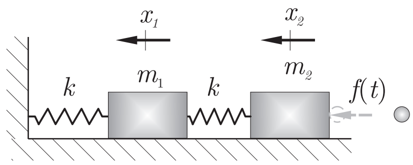
Rešitev:

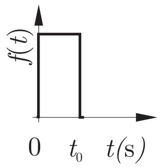
$\omega_1 = \sqrt{\frac{6mg}{m_s l}} = 24{,}26\,\mathrm{rad/s}$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{18mg}{m_s l}} = 42{,}02\,\mathrm{rad/s}$

Naloga 3.2

Projektil prileti v klado mase m_2 in v času t_0 nanjo deluje s silo $f(t)$. Določite odziv celotnega sistema v času $t > t_0$, če le-ta na začetku miruje in so lastne frekvence in lastni vektorji sistema znani. *Navodilo*: z modalno dekompozicijo določite gibalni enačbi v glavnih koordinatah, nato uporabite konvolucijski integral na vsaki od enačb.





Podatki:

$m_1 = m = 1\,\mathrm{kg}$
$m_2 = 2m$
$k = 1000\,\mathrm{N/m}$
$F = 100\,\mathrm{N}$
$t_0 = 0{,}01\,\mathrm{s}$

$\omega_{01} = 14{,}81\,\mathrm{rad/s}$
$\omega_{02} = 47{,}76\,\mathrm{rad/s}$

$\boldsymbol{X}^{(1)} = (1 \quad 1{,}78)^T$
$\boldsymbol{X}^{(2)} = (1 \quad -0{,}28)^T$

$$f(t) = \begin{cases} F & ; \quad 0 \le t \le t_0 \\ 0 & ; \quad \text{drugje} \end{cases}$$

Rešitev:

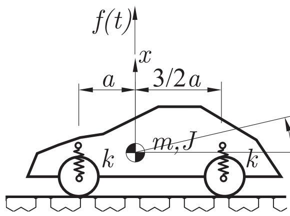
$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}$

$\eta_1(t) = \frac{1{,}78F}{k_1}\left[\cos(\omega_{01}(t-t_0)) - \cos(\omega_{01}t)\right]$

$\eta_2(t) = -\frac{0{,}28F}{k_2}\left[\cos(\omega_{02}(t-t_0)) - \cos(\omega_{02}t)\right]$

Naloga 3.3

Vzbujanje, kot posledica delovanja avtomobilskega motorja, je v težišču avtomobila (x) ocenjeno z $f(t)$. Določite kakšen vektor amplitud ustaljenega nihanja avtomobila pričakujemo. Nalogo rešite z *uporabo modalnih koordinat.* Avtomobil ima maso m, masni vztrajnostni moment okrog težišča J_T ter enaki togosti vzmetenja prve in zadnje gredi, k. *Namig*: Amplituda odziva ustaljenega stanja nedušenega sistema z *eno prostostno stopnjo* je $X = F_0/[k(1-(\omega/\omega_0)^2)]$, kjer je F_0 amplituda vzbujevalne sile, k togost sistema in ω_0 lastna krožna frekvenca. Uporabite koordinati x in φ.



Podatki:

$f(t) = F_0 \sin(\Omega t)$
$\Omega = 1000\,\mathrm{Hz}$
$m = 1000\,\mathrm{kg}$
$J_T = 1/2ma^2$
$k = 100\,\mathrm{kN/m}$
$a = 0{,}8\,\mathrm{m}$
$b = 3/2a$

Rešitev:

$\omega_1 = 1{,}38\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = 2{,}57\sqrt{\frac{k}{m}}$

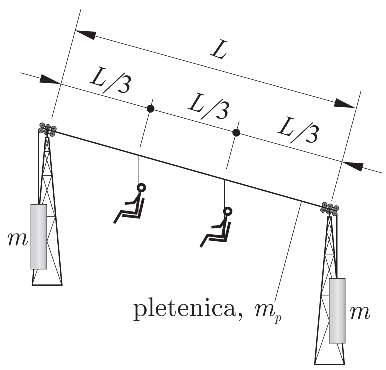
$\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{f}$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 11{,}52 & -0{,}27 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{F_0}{k_1(1-(\Omega/\omega_1)^2)} \\ \frac{F_0}{k_2(1-(\Omega/\omega_2)^2)} \end{pmatrix}$

$\overline{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}$

Naloga 3.4

Največ kolikšna je lahko razdalja med stebri sedežnice L, da bo prva lastna upogibna frekvenca sistema (pletenica in smučarji) vsaj f_{01}. Masa pletenice med dvema sosednjima stebroma je približno konstantna in enaka m_p. Pletenica je obtežena z dvema utežema mase m na vsakem koncu. Vsak tak odsek žičnice je še dodatno obremenjen s težo dveh smučarjev, vsak z maso m_s. Izračun izvršite z diskretizacijo strune na 2 masni točki na mestih vpetja sedežev (upoštevajte tudi maso dveh smučarjev). Vertikalne pomike uteži in nagib pletenice zanemarite.



Podatki:

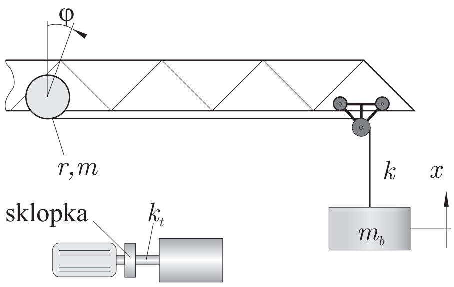
$m_p = 800\,\mathrm{kg}$
$m = 20000\,\mathrm{kg}$
$m_s = 100\,\mathrm{kg}$
$f_{01} = 1\,\mathrm{Hz}$

Rešitev:

$L \leq \frac{6mg}{(2m_s+m_p)\omega_1^2} = 29{,}82\,\mathrm{m}$

Naloga 3.5

Za primer, ko elektromotor navijalnega sistema žerjava miruje, sistemu "breme – navijalni boben" določite *modalno togostno matriko*. Breme ima maso m_b, boben ima maso m, polmer r, in je z elektromotorjem povezan preko gredi togosti k_t, boben in breme pa sta med seboj povezana s pletenico togosti k. *Namig*: ne pozabite na torzijsko vzmet k_t in na to, da se sila teže bremena izenači s statičnim raztezkom pletenice in torzijske vzmeti.



Podatki:

$r = 0{,}2\,\mathrm{m}$
$m = 20\,\mathrm{kg},\ m_b = 10m$
$k = 100\,\mathrm{kN/m},\ k_t = 9kr^2$

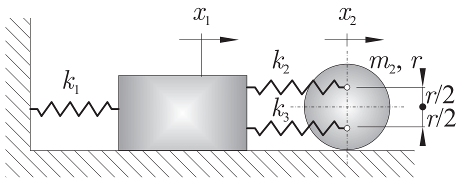
Rešitev:

$\omega_1 = 0{,}3\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 4{,}47\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{0{,}101}{r} & -\frac{198{,}1}{r} \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} 3{,}97 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix} \cdot k$

Naloga 3.6

Določite lastne frekvence, skicirajte lastne oblike ter izračunajte modalno masno matriko sistema na sliki. *Navodilo:* upoštevajte majhne kote in zasuke.



Podatki:

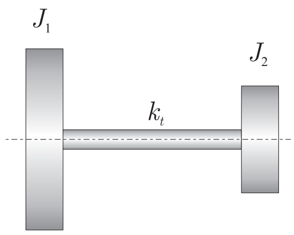
$m = 1\,\mathrm{kg},\ k = 1000\,\mathrm{N/m}$
$k_1 = 2k \quad k_2 = k \quad k_3 = k$
$m_1 = m \quad m_2 = 2m$

Rešitev:

$\omega_1 = 0{,}68\sqrt{\frac{k}{m}} = 21{,}38\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega_2 = 2{,}09\sqrt{\frac{k}{m}} = 66{,}15\,\mathrm{rad/s}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}77 & -0{,}19 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{M}} = \mathbf{\Phi}^T \boldsymbol{M} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 10{,}40 & 0 \\ 0 & 1{,}11 \end{bmatrix}$

Naloga 3.7

Izvršite modalno dekompozicijo sistema s slike ter zapišite (oz. nakažite) izraz za splošni odziv lastnega torzijskega nihanja sistema $\boldsymbol{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)\}^T$ ob uporabi modalnih koordinat. *Navodilo*: upoštevajte majhne zasuke, maso gredi pa zanemarite.



Podatki:

$J,\ k_t$
$J_1 = 2J \quad J_2 = J$

Rešitev:

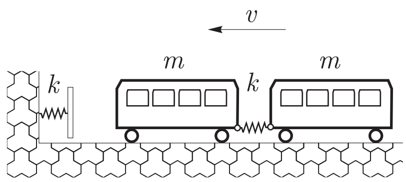
$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2J}}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\eta_i = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$

$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{Bmatrix} A_1 + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ A_1 - 2A_2 \cos(\omega_2 t) - 2B_2 \sin(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$

Naloga 3.8

Tik preden vlakovna kompozicija trči (trk je trenuten) ob brezmasno končno oviro, se le-ta giblje s konstantno hitrostjo v. Za čas, ko je levi vagon v stiku z oviro, najprej določite lastne frekvence in lastne vektorje sistema. Nadalje *nakažite* tudi izraz za odziv sistema kot posledica hitrosti v, in sicer s pomočjo modalnih koordinat. Namreč, odziv posamezne, i-te modalne koordinate lastnega nihanja, je v obliki $\eta_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$ s konstantami A_i in B_i, odvisnimi od začetnih pogojev. Ker pa že poznamo povezavo fizikalnih in modalnih koordinat preko modalne matrike $\mathbf{\Phi}$, $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}$, lahko določimo neznane konstante A_i in B_i, katerih izračun morate torej *nakazati*.



Podatki:

$k = 5 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m}$, $m = 10\,\mathrm{ton}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$

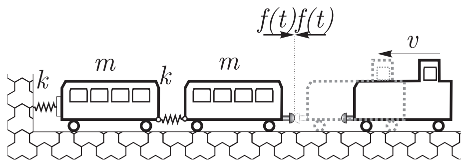
Rešitev:

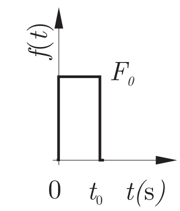
$$\omega_1 = 437\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega_2 = 1144{,}1\,\mathrm{rad/s}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}62 & -0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \mathbf{\Phi}\dot{\boldsymbol{\eta}}(0) &= \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\begin{pmatrix} B_1\omega_1 \\ B_2\omega_2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1,\, A_2,\, B_1,\, B_2$$

Naloga 3.9

Ob trku lokomotive v prvi vagon mirujoče *kompozicije dveh vagonov* se ustvari sila $f(t)$ (glej sliko). Če so modalne lastnosti vagonske kompozicije (dva vagona, brez lokomotive) že znane, določite odziv obeh vagonov zaradi delovanja sile $f(t)$ kot posledica trka. *Navodilo*: z modalno dekompozicijo določite gibalni enačbi v glavnih koordinatah, nato uporabite konvolucijski integral.





Podatki:

m, k, F_0, t_0

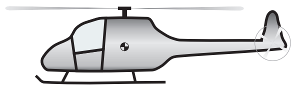
$$f(t) = \begin{cases} F_0 & ; \quad 0 \le t \le t_0 \\ 0 & ; \quad \text{drugje} \end{cases} \qquad \omega_{01} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{k/m} \quad \boldsymbol{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}^T$$

$$\omega_{02} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{k/m} \quad \boldsymbol{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^T$$

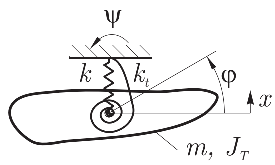
Rešitev:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{F_0(\sqrt{5}+1)}{2m_1\omega_1^2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_1(t_0 - t))\right) \\ \frac{F_0(\sqrt{5}-1)}{2m_2\omega_2^2}\left(\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_2(t_0 - t))\right) \end{pmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{M}} = \mathbf{\Phi}^T \boldsymbol{M} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Naloga 3.10



(a)



(b)

Helikopter na sl. a) modeliramo kot sistem z dvema prostostnima stopnjama, x in φ, sl. b). Eliso nadomestimo z linearno vzmetjo togosti k in spiralno vzmetjo togosti k_t, kabino helikopterja pa kot togo telo mase m in masnega vztrajnostnega momenta J_T. Pri vrtenju elise helikopterja predpostavimo vzbujanje v obliki $\psi(t)$, ki se od elise preko *spiralne vzmeti* prenese na ohišje helikopterja. Določite lastne frekvence ter tudi odziv ustaljenega stanja helikopterja kot posledica omenjenega vzbujanja.

Podatki:

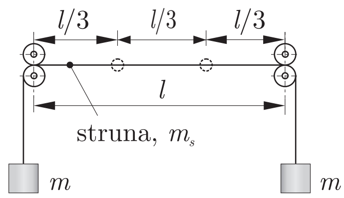
$m,\ J_t = 1/2m,\ k,\ k_t = 4k,\ \Psi,\ \Omega,\ \psi(t) = \Psi\sin(\Omega t)$

Rešitev:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{8\frac{k}{m}}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4k\Psi}{4k-1/2\Omega^2} \end{pmatrix}\sin(\Omega t)$$

Naloga 3.11

Določite modalno (generalizirano) togostno matriko sistema-strune, če struno modelirate v obliki diskretizacije na dve masni točki (glej skico).



Podatki:

$m_s = 1\,\mathrm{kg}$
$m = 100\,\mathrm{kg}$
$l = 10\,\mathrm{m}$

Rešitev:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \frac{m_s l}{6mg}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

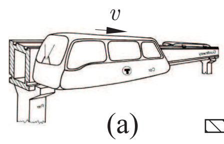
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6mg}{m_s l}} = 24{,}26\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{18mg}{m_s l}} = 42{,}02\,\mathrm{rad/s}$$

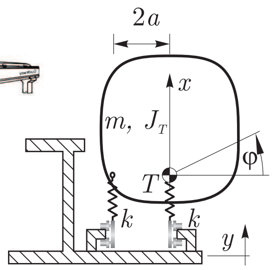
$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Naloga 3.12

Vpliv netočnosti izdelave, vpliv stikov in ostalih nehomogenosti tračnic s sl. (a) in (b), predstavimo v obliki kinematskega vzbujanja tračnic, $y(t)$. To motnjo predstavimo v obliki enostavne, harmonske motnje, ki deluje neposredno na kolesa vagona, sl. (b), ki so ves čas v stiku s tračnicami. Določite najprej modalno masno matriko sistema, potem pa še *ustaljeni odziv* vagona (koordinati x in φ) na dano motnjo, kjer vpliv gibanja vagona na nihanje zanemarimo. Vagon ima maso m in masni vztrajnostni moment okrog težišča J_T.



(a)



(b)

Podatki:

$v = 15\,\mathrm{m/s},\ a = 2\,\mathrm{m},\ m = 1000\,\mathrm{kg}$
$k = 1\,\mathrm{MN/m},\ Y = 0{,}01\,\mathrm{m},\ J_T = 5ma^2$
$y(t) = Y\sin(10vt/a)$

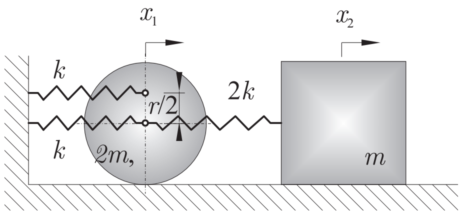
Rešitev:

$$\omega_1 = 0{,}57\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1{,}57\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \bar{\boldsymbol{m}} = \begin{bmatrix} 0{,}84m/a & 0 \\ 0 & 1{,}26m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}26\,\mathrm{mm} \\ 0{,}038\,^\circ \end{pmatrix}\sin(10vt/a)$$

Naloga 3.13

Določite lastne frekvence, skicirajte lastne oblike ter izračunajte modalno masno matriko sistema na sliki. Valj se kotali brez podrsavanja. *Navodilo:* upoštevajte majhne kote in zasuke.



Podatki:

$m = 1\,\text{kg},\; k = 1000\,\text{N/m}$

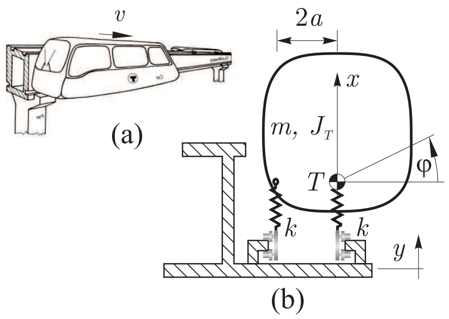
Rešitev:

$\omega_1 = 0{,}84\sqrt{\frac{k}{m}} = 26{,}71\,\text{rad/s},\quad \omega_2 = 1{,}74\sqrt{\frac{k}{m}} = 55{,}10\,\text{rad/s}$

$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}55 & -1{,}93 \end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 5{,}41 & 0 \\ 0 & 6{,}72 \end{bmatrix}$

Naloga 3.14

Vpliv netočnosti izdelave, vpliv stikov in ostalih nehomogenosti tračnic s sl. (a) in (b), predstavimo v obliki kinematskega vzbujanja tračnic, $y(t)$. To motnjo predstavimo v obliki enostavne, harmonske motnje, ki deluje neposredno na kolesa vagona, sl. (b), ki so ves čas v stiku s tračnicami. Določite *ustaljeni odziv* vagona (koordinati x in φ) na dano motnjo, kjer vpliv vzdolžnega gibanja vagona na nihanje zanemarimo. Vagon ima maso m in masni vztrajnostni moment okrog težišča J_T.



Podatki:

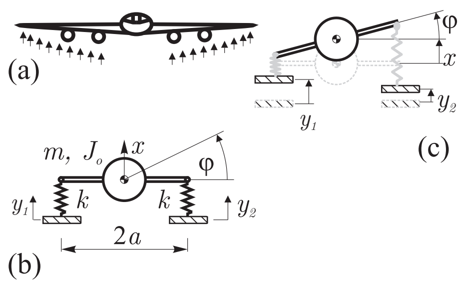
$v = 15\,\text{m/s},\ a = 2\,\text{m},\ m = 1000\,\text{kg}$
$k = 1\,\text{MN/m},\ Y = 0{,}01\,\text{m},\ J_T = 5ma^2$
$y(t) = Y\sin(10vt/a)$

Rešitev:

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}26\,\text{mm} \\ 0{,}038\,^\circ \end{pmatrix} \sin(10vt/a)$

Naloga 3.15

Letalo s sl. (a) je med letom podvrženo periodični obremenitvi na vsakem krilu. Če to obremenitev predstavimo v obliki enostavne, harmonske motnje na vsako krilo, y_1 in y_2, potem je vaša naloga, da določite *ustaljeni odziv* trupa letala, x in φ, na dano vzbujanje s frekvenco Ω. Uporabite model s sl. (b), v pomoč pa naj vam bo tudi sl. (c), ki prikazuje model v poljubni legi (vse koordinate so prikazane v pozitivni smeri).



Podatki:

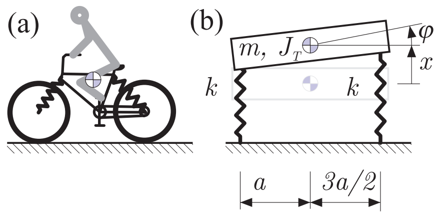
$m,\ J_0,\ k,\ a,\ Y$
$Y_1 = 2Y,\ Y_2 = Y$
$y_i = Y_i \sin(\Omega t)$

Rešitev:

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3kY}{2k - m\Omega^2} \\ -\frac{kaY}{2ka^2 - J_0\Omega^2} \end{pmatrix} \sin(\Omega t)$

Naloga 3.16

Za sistem kolo-kolesar s sl. (a) določite lastne frekvence, lastne vektorje in modalno masno ter modalno togostno matriko. Uporabite model s sl. (b) ter upoštevajte majhne pomike in zasuke.



Podatki:

k, m, $J_T = 1/2ma^2$, a

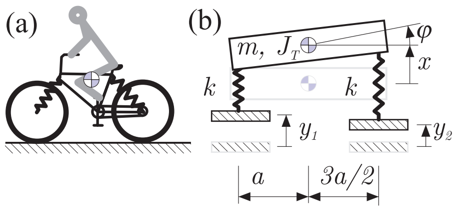
Rešitev:

$\omega_1 = 1{,}38\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 2{,}57\sqrt{k/m}$, $\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}22/a & 9{,}22/a \end{bmatrix}$

$\bar{\boldsymbol{m}} = \begin{bmatrix} m + \frac{0{,}22^2 J_T}{a^2} & 0 \\ 0 & m + \frac{9{,}22^2 J_T}{a^2} \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} 1{,}94k & 0 \\ 0 & -274{,}28k \end{bmatrix}$

Naloga 3.17

Kolesar je med vožnjo zaradi neravnin podvržen vibracijam, ki se preko kolesa prenašajo nanj. Kolesarja s kolesom modeliramo v obliki kot to prikazuje sl. (b), kjer je sta m in J_T masa in masni vztrajnostni moment kolesarja skupaj s kolesom, neravnine med vožnjo pa predstavimo v poenostavljeni obliki vzbujanja podlage $\boldsymbol{y}(t) = \{y_1(t),\ y_2(t)\}^T$. Določite amplitudo težišča (koordinata x) *ustaljenega odziva* kolesarja s kolesom.



Podatki:

$m = 100\,\mathrm{kg}$, $J_T = 3/2ma^2$, $a = 1\,\mathrm{m}$, $\Omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$

$y_1(t) = a/4\sin(\Omega t)$

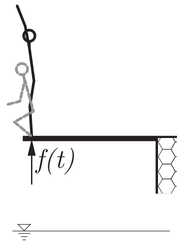
$y_2(t) = a/2\sin(\Omega t)$

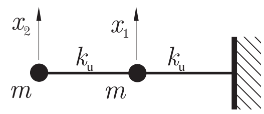
Rešitev:

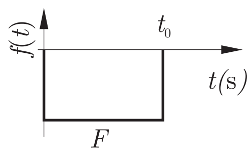
$X = 7{,}7\,\mathrm{cm}$

Naloga 3.18

Skakalec v vodo je najprej miroval na odskočni deski, potem pa se je od le-te odrinil. Izmerjena dinamična sila skakalca na desko je taka kot to prikazuje slika. Če desko predstavimo kot sistem z dvema prostostnima stopnjama, potem določite odziv konca deske, $x_2(t)$, v trenutku, ko skakalec izgubi stik z desko, t_0. *Navodilo*: z modalno dekompozicijo določite gibalni enačbi v glavnih koordinatah, nato uporabite konvolucijski integral.







$$F,\ t_0,\ f(t) = \begin{cases} -F & ; \quad 0 \le t \le t_0 \\ 0 & ; \quad \text{drugje} \end{cases}$$

Podatki:

$m = 10\,\mathrm{kg}$

$k_u = 100\,\mathrm{kN/m}$

$\omega_{01} = 61{,}80\,\mathrm{rad/s}$

$\omega_{02} = 161{,}80\,\mathrm{rad/s}$

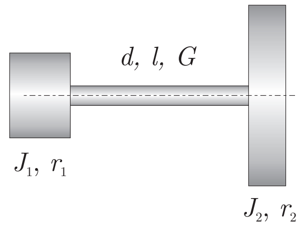
$\boldsymbol{X}^{(1)} = \{1 \quad 1{,}618\}^T$

$\boldsymbol{X}^{(2)} = \{1 \quad -0.618\}^T$

4 Zvezni sistemi

Naloga 4.1

Določite oz. nakažite izraz za določitev prvih treh lastnih frekvenc torzijskega nihanja gredi po teoriji zveznih sistemov.



Podatki:

$J_1 = 2J$
$J_2 = J$
$r_1 = r$
$r_2 = 2r$
$d = r/10$

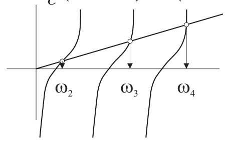
$l = 20r$
$k_t = G\pi d^4/(32l)$
$M_t = GI_t \cdot \partial\varphi/\partial x$
$I_t = \pi d^4/32$

Rešitev:

$\omega^2 \left[GI_t \frac{\omega}{c} + 2J\frac{\omega}{c}GI_t + \left(\frac{G^2 I_t^2}{c^2} - 2J^2\omega^2\right)\tan(\frac{\omega}{c}l)\right] = 0$

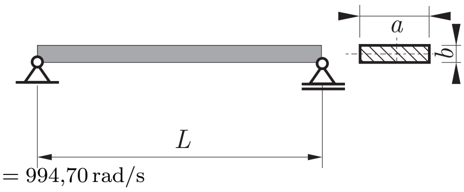
$\omega_1 = 0$, ostale iz:

$GI_t \frac{\omega}{c}(1 + 2J) = (2J^2\omega^2 - GI_t^2/c^2)\tan(\frac{\omega}{c}l)$



Naloga 4.2

Določite prve 3 lastne frekvence lastnega upogibnega ravninskega nihanja nosilca po Euler-Bernoullijevi teoriji.



Podatki:

$L = 2\,\mathrm{m}$ $\quad \rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$
$a = 10\,\mathrm{cm}$ $\quad E = 210\,\mathrm{GPa}$
$b = 3\,\mathrm{cm}$

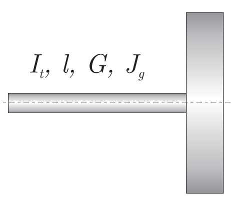
Rešitev:

$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$;

$\omega_1 = 110{,}52\,\mathrm{rad/s}$ $\quad \omega_2 = 442{,}08\,\mathrm{rad/s}$ $\quad \omega_3 = 994{,}70\,\mathrm{rad/s}$

Naloga 4.3

Določite oz. nakažite izraz za določitev prvih treh lastnih frekvenc torzijskega nihanja gredi po *teoriji zveznih sistemov*.



Podatki:

$J_g,\ G,\ I_t,\ l,\ J$

Rešitev:

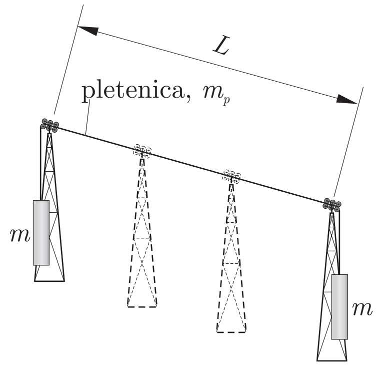
$\omega\left[-G\frac{I_t}{c}\sin(\omega l/c) - J\omega\cos(\omega l/c)\right] = 0$

$\omega_1 = 0$, ostale sledijo iz:

$-\frac{c^2 J}{GI_t l}\frac{\omega l}{c} = \tan(\omega l/c)$

Naloga 4.4

Najmanj koliko dodatnih stebrov (prikazani črtkano) moramo namestiti med prvim in zadnjim stebrom, ki sta medsebojno oddaljena za L, da bo prva lastna frekvenca pletenice sedežnice na Krvavcu enaka vsaj f_{01} (ali večja). Pletenica je obtežena z dvema utežema mase m na vsakem koncu. Vertikalne pomike uteži in nagib pletenice zanemarite.



Podatki:

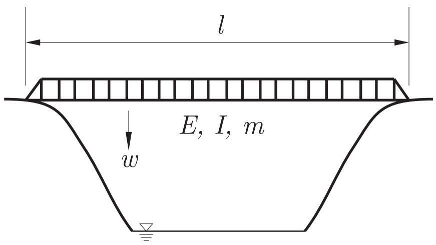
$m_p = 1000\,\mathrm{kg}$
$m = 10000\,\mathrm{kg}$
$L = 200\,\mathrm{m}$
$f_{01} = 2{,}5\,\mathrm{Hz}$

Rešitev:

$n = 7$

Naloga 4.5

Most s slike predstavimo z modelom nosilca z enakomerno porazdeljeno maso in togostjo ter obojestranskim členkastim vpetjem. Z uporabo Euler-Bernoullijeve teorije določite prvi dve lastni frekvenci nihanja mostu ter pripadajoči lastni obliki. Lastni obliki zapišite matematično in ju potem še skicirajte. Most ima ekvivalentni modul elastičnosti E, maso m in vztrajnostni moment prereza I.



Podatki:

$m = 2500 \times 10^3\,\mathrm{kg}$
$I = 0{,}417\,\mathrm{m}^4$
$E = 2{,}1 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m}^2$
$l = 100\,\mathrm{m}$

Rešitev:

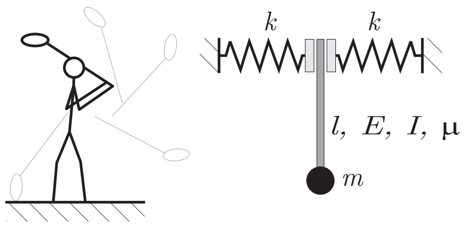
$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

$W_1(x) = D_4\Big(\sin(\beta_1 x) \pm \frac{\sin(\beta_1 l)}{\sinh(\beta_1 l)}\sinh(\beta_1 x)\Big)$

$W_2(x) = D_4\Big(\sin(\beta_2 x) \pm \frac{\sin(\beta_2 l)}{\sinh(\beta_2 l)}\sinh(\beta_2 x)\Big)$

Naloga 4.6

Zaradi želje po preučitvi vpliva dinamike palice za golf na človeka, je vaša naloga, da določite (nakažete) izraz za prvo lastno frekvenco modela palice s sl. (b) v odvisnosti od danih parametrov. Dve vzmeti togosti k ponazarjata oprijem palice z rokama. Nalogo rešite z uporabo Euler-Bernoullijeve teorije. *Opomba*: zasuki nosilca na mestu oprijema rok so enak nič (glej sliko (b)).



(a) (b)

Podatki:

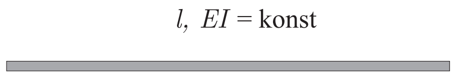
$l,\ k,\ E,\ I, m,\ \mu$

Rešitev:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2k & 2kEI\beta^3 & 2k & -2kEI\beta^3 \\ \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) & -\cos(\beta l) & -\sin(\beta l) \\ \sinh(\beta l) + \omega^2 \frac{m}{EI}\cosh(\beta l) & \cosh(\beta l) + \omega^2 \frac{m}{EI}\sinh(\beta l) & \sin(\beta l) + \omega^2 \frac{m}{EI}\cos(\beta l) & -\cos(\beta l) - \omega^2 \frac{m}{EI}\sin(\beta l) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 \text{ (1. koren)}$$

Naloga 4.7

Določite prvo in drugo lastno frekvenco ravninskega upogibnega nihanja ravne, homogene palice po Euler-Bernoullijevi teoriji. Podprtje je prosto-prosto.



Podatki:

l, E, I, μ

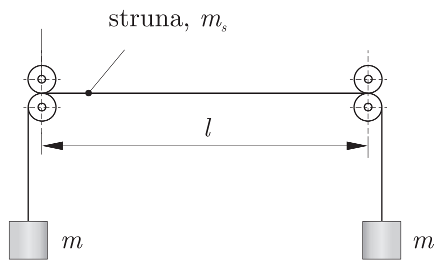
Rešitev:

$\cos(\beta l)\cosh(\beta l) = 1 \Rightarrow \cos(\beta l) = \frac{1}{\cosh(\beta l)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \quad \omega_2$ numerično iz zgornje transcedentne enačbe

Naloga 4.8

Določite prve tri lastne frekvence strune, vpete med dvema kolutoma. Uporabite teorijo zveznih sistemov.



Podatki:

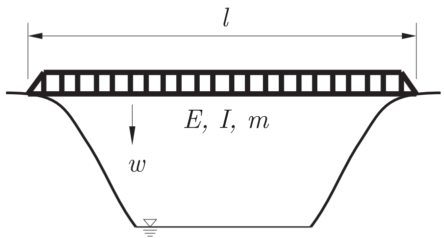
m_s, l, m

Rešitev:

$w_k = k\pi\sqrt{\frac{mg}{m_s l}}$

Naloga 4.9

Most s slike predstavimo z modelom nosilca z enakomerno porazdeljeno maso in togostjo ter obojestranskim členkastim vpetjem. Z uporabo Euler-Bernoullijeve teorije določite prve tri lastne frekvence nihanja mostu ter skicirajte pripadajoče lastne oblike. Most ima ekvivalentni modul elastičnosti E, maso m in vztrajnostni moment prereza I.



Podatki:

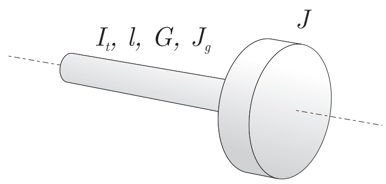
$m = 2500 \times 10^3\,\mathrm{kg}$
$I = 0{,}417\,\mathrm{m}^4$
$E = 2{,}1 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m}^2$
$l = 100\,\mathrm{m}$

Rešitev:

$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

Naloga 4.10

Določite oz. nakažite izraz za določitev prvih treh lastnih frekvenc torzijskega nihanja gredi po *teoriji zveznih sistemov.* J_g je masni vztrajnostni moment gredi, J je masni vztrajnostni moment diska na koncu gredi. Gred ni vpeta v okolico.



Podatki:

J_g, G, I_t, l, J

Rešitev:

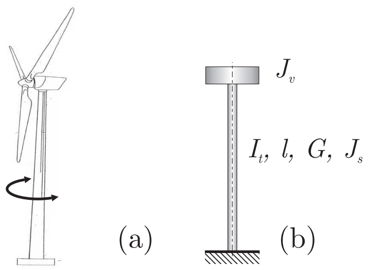
$\omega\left[-G\frac{I_t}{c}\sin(\omega l/c) - J\omega\cos(\omega l/c)\right] = 0$

$\omega_1 = 0$, ostale sledijo iz:

$-\frac{c^2 J}{G I_t l}\frac{\omega l}{c} = \tan(\omega l/c)$

Naloga 4.11

Določite oz. nakažite izraz za določitev prve lastne frekvence torzijskega nihanja stolpa vetrne turbine, sl. (a), po *teoriji zveznih sistemov*. Uporabite nadomestni model turbine s sl. (b), kjer sta J_v in J_s masna vztrajnostna momenta vetrnice in stolpa, l, I_t in G pa so višina, vzvojni vztrajnostni moment in strižni modul stolpa.



Podatki:

J_s, J_v, l, G, I_t

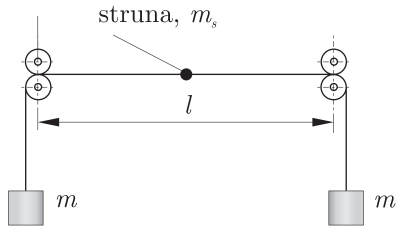
Rešitev:

$\frac{GI_t}{cJ_t}\frac{1}{\omega} = \tan(\frac{\omega}{c}l) \Rightarrow \omega_1$

$c^2 = \frac{GI_t l}{J_s}$

Naloga 4.12

Kakšna je razlika v rezultatu prve lastne frekvence med aproksimativnim pristopom (diskretizacija strune na 1 masno točko) in med eksaktnim pristopom (struna kot zvezni sistem), glede na eksaktni rezultat. Izraz za eksaktni izračun prve lastne krožne frekvence je $\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{P}{m_s l}}$, kjer je P notranja sila v struni, m_s je masa strune, l pa je dolžina strune med podporama.



Podatki:

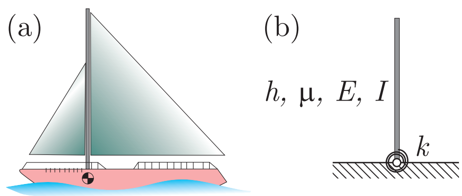
m_s, m, l

Rešitev:

$\epsilon = \frac{\pi-2}{\pi}100\% = 36\,\%$

Naloga 4.13

Ob uporabi *Euler-Bernoullijevega* pristopa je za jadrnico s sl. (a) potrebno določiti (nakazati) izraz za prvo lastno frekvenco upogibnega nihanja jambora jadrnice. Ker nas zanima zgolj nihanje jambora, bomo uporabili model s sl. (b). V modelu sta voda in deformabilnost trupa predstavljena v obliki ekvivalentne rotacijske togosti k, model jambora pa je predstavljen v obliki nosilca s specifično maso μ.



Podatki:

h, E, I, μ, k

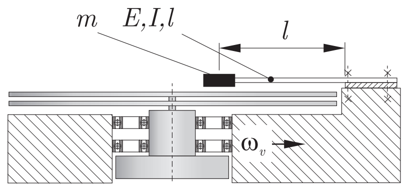
Rešitev:

$\tanh(\beta h) = \tan(\beta h) \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \omega_1 = \beta_1^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

5 Metoda prenosnih matrik

Naloga 5.1

Bralno-pisalna glava trdega diska, mase m, je zaradi vrtenja osrednjega dela izpostavljena vibracijam, ki se preko ležajev prenašajo na nosilec le-te (nosilec ima lastnosti E, I, l). Določite izraz za izračun najmanjšega potrebnega vztrajnostnega momenta prereza nosilca glave, I (konstanten po celotni dolžini nosilca), da bo lastna frekvenca sistema glava-nosilec vsaj za 10% višja od vzbujevalne frekvence ω_v. Nosilec obravnavajte kot brezmasno elastično polje. Uporabite metodo prenosnih matrik.



Podatki:

ω_v, E, m, l

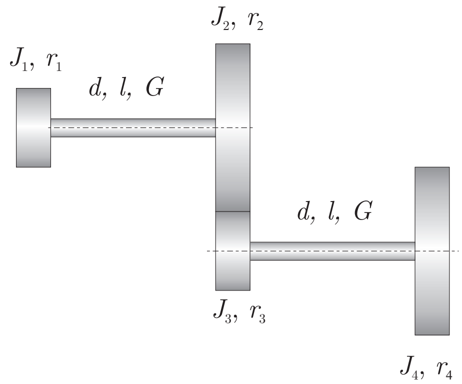
$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/(2EI) & l^3/(6EI) \\ 0 & 1 & l/(EI) & l^2/(2EI) \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -y \\ \gamma \\ M \\ T \end{pmatrix}$$

Rešitev:

$I_{min} = \frac{m(1{,}1\omega_v)^2 l^3}{3E}$

Naloga 5.2

Z metodo prenosnih matrik določite lastne frekvence torzijskega nihanja sistema na sliki.



Podatki:

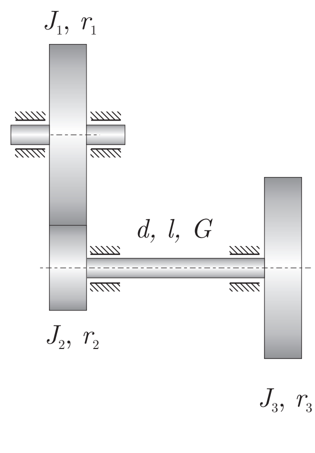
$l = 200\,\mathrm{mm}$
$d = 20\,\mathrm{mm}$
$G = 4 \times 10^4\,\mathrm{MPa}$
$J_1 = J_3 = J = 1\,\mathrm{kgm}^2$
$J_2 = J_4 = 2J$
$r_1 = r_3 = r/2$
$r_2 = r_4 = r$
$k_t = G\pi d^4/(32l)$

Rešitev:

$\omega^2 J\left[-12J^2\omega^4 + 28Jk_t\omega^2 - 15k_t^2\right] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k_t}{6J}} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k_t}{2J}}$

Naloga 5.3

Z metodo prenosnih matrik določite lastne frekvence torzijskega nihanja sistema na sliki.



Podatki:

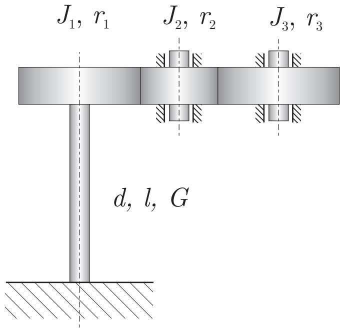
$l = 200\,\mathrm{mm}$	$J_2 = J/4$
$d = 20\,\mathrm{mm}$	$r_1 = r_3 = r$
$G = 4 \times 10^4\,\mathrm{MPa}$	$r_2 = r/2$
$J_1 = J_3 = J = 0{,}1\,\mathrm{kgm}^2$	$k_t = G\pi d^4/(32l)$

Rešitev:

$\omega^2\left[3J + -\frac{4\omega^2 J^2}{k_t}\right] = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0\,\mathrm{rad/s} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k_t}{J}} = 153{,}5\,\mathrm{rad/s}$

Naloga 5.4

Z *metodo prenosnih matrik* določite lastne(o) frekvence(o) torzijskega nihanja sistema na sliki.



Podatki:

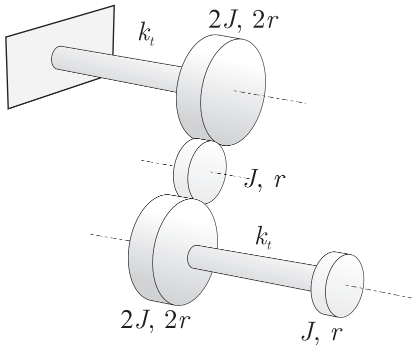
l, d, G, J
$J_2 = J/4$, $J_1 = J_3 = J$
$r_1 = r_3 = r$, $r_2 = r/2$
$k_t = G\pi d^4/(32l)$

Rešitev:

$\omega = \sqrt{\frac{G\pi d^4}{96lJ}}$

Naloga 5.5

Po metodi prenosnih matrik določite obe lastni frekvenci torzijskega nihanja sistema na sliki. Sistem je na skrajnem levem koncu vpet, na skrajnem desnem koncu pa ni vpet.



Podatki:

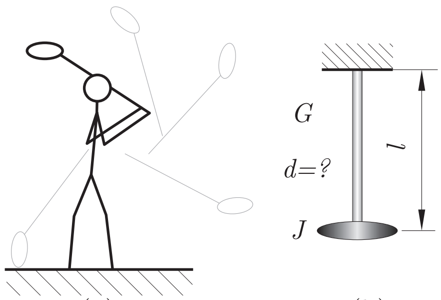
J, k_t

Rešitev:

$\omega_1 = 0{,}33\sqrt{\frac{J}{k_t}}$
$\omega_2 = 1{,}07\sqrt{\frac{J}{k_t}}$

Naloga 5.6

Zaradi izboljšanja kvalitete igranja golfa na travi, je potrebno palici za golf določiti ustrezni najmanjši/največji premer ročaja, da bo prva lastna frekvenca *torzijskega nihanja* modela s slike (b) večja od f_1. Model palice s sl. (b) ima okrogli presek ročaja, ki je togo vpet na vrhu, na spodnjem koncu ročaja pa J predstavlja masni vztrajnostni moment celotne palice za golf. Uporabite metodo prenosnih matrik pri torziji.



(a) (b)

Podatki:

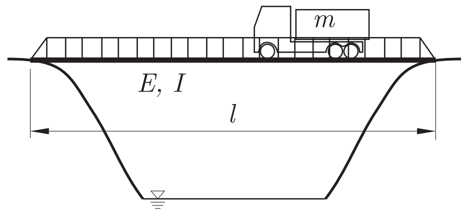
l, $k_t = \frac{G\pi d^4}{32l}$, f_1, J

Rešitev:

$d = \sqrt[4]{\frac{128\pi f_1^2 l}{G}}$

Naloga 5.7

Po metodi *prenosnih matrik* določite upogibno lastno frekvenco sistema most-tovornjak za primer, ko je tovornjak na sredini mostu. Most je obojestransko, členkasto vpet, njegovo maso pa zanemarimo. Tovornjak predstavimo v obliki masne točke mase m. *Namig: ni potrebno računati vseh členov končne prenosne matrike.*



Podatki:

l, E, m, I

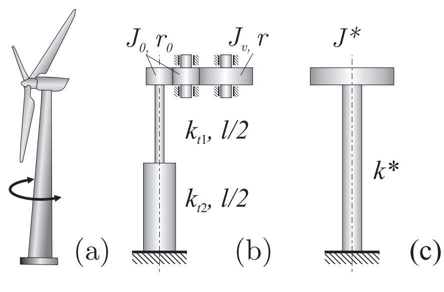
$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/(2EI) & l^3/(6EI) \\ 0 & 1 & l/(EI) & l^2/(2EI) \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -y \\ \gamma \\ M \\ T \end{pmatrix}$$

Rešitev:

$\omega = \sqrt{\frac{6EI}{ml^3}}$

Naloga 5.8

Z namenom preučitve lastnih torzijskih nihanj vetrnice s sl. (a), je na sl. (b) prikazan model te vetrnice. Model je sestavljen iz brezmasne, sestavljene gredi s togostima k_{t_1} in k_{t_2} ter zobniškega prenosa na vrhu, z vztrajnostmi J_v in J_0. Najprej določite nadomestni model s sl. (c), potem pa ob uporabi *metode prenosnih matrik* določite kakšno togost k moramo uporabiti, da bo lastna frekvenca vetrnice večja od zahtevane in podane frekvence Ω: $\omega > \Omega$.



Podatki:

Ω, r, J, l, $k_{t_1} = k/2$, $k_{t_2} = k$, $J_v = 4J$, $J_0 = J$, $r_0 = r/4$

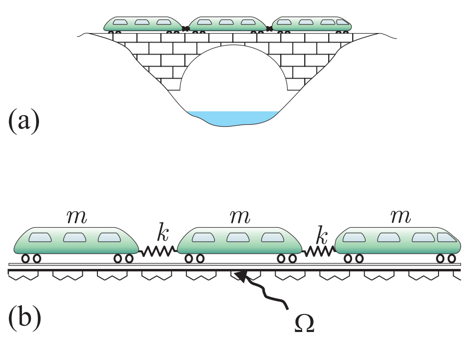
Rešitev:

$k^* = k/3, \quad J^* = 9/4J$

$k > \frac{27J\Omega^2}{4}$

Naloga 5.9

Za vagonsko kompozicijo treh vagonov je potrebno dimenzionirati/določiti elastično vpetje med vagoni k tako, da bo odziv kompozicije na raznovrstno vzbujanje, ki se pojavi med vožnjo vlaka, v *podresonančnem* območju. Največja pričakovana, zunanja frekvenca vzbujanja kompozicije, ki se pojavi med samo vožnjo vlaka, je Ω. Uporabite model s sl. (b), zanemarite pa vpliv vožnje kompozicije (s stalno hitrostjo) na nihanje. Uporabite *metodo prenosnih matrik*.



Podatki:

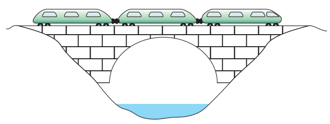
m, Ω, $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}$

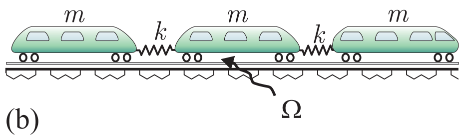
Rešitev:

$k > m\Omega^2$

Naloga 5.10

Za vagonsko kompozicijo treh vagonov je potrebno dimenzionirati/določiti elastično vpetje med vagoni k tako, da bo odziv kompozicije na raznovrstno vzbujanje, ki se pojavi med vožnjo vlaka, v *nadresonančnem* območju. Najmanjša pričakovana, zunanja frekvenca vzbujanja kompozicije, ki se pojavi med samo vožnjo vlaka, je Ω. Uporabite model s sl. (b), zanemarite pa vpliv vožnje kompozicije (s stalno hitrostjo) na nihanje. Uporabite *metodo prenosnih matrik*.


(a)



(b)

Podatki:

$$m,\ \Omega,\ \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}$$

Rešitev:

$k < \frac{m\Omega^2}{3}$